홍익대학교 2019학년도 자연계열 수리논술

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하여라.

1부터 10까지의 자연수를 모두 사용하여 임의의 순서로 나열하는 시행의 결과를 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_8,\ a_9,\ a_{10}$이라고 하자.

(1) $a_1 < a_2$인 경우를 사건 A라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(A)$를 구하시오.

(2) $a_1 < a_2$인 사건을 A라고 하고 $a_2 < a_3$인 사건을 B라고 할 때, 사건 A와 사건 B가 독립인지 종속인지 근거를 제시하여 판단하시오.

(3) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$인 사건을 C라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(C)$를 구하시오.

(4) $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$을 만족하는 자연수 n의 최댓값을 확률변수 X라고 하자.

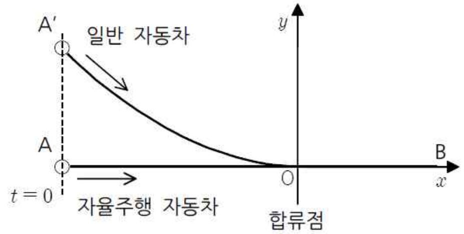
예) $\underline{5},\ 2,\ 9,\ 3,\ 1,\ \cdots$: $X=1$

$\underline{3,\ 4,\ 8},\ 5,\ 1,\ \cdots$: $X=3$

확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$가 $1 < \mathrm{E}(X) < 2$을 만족함을 보이시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하여라.

그림과 같이 자율주행 자동차는 합류점 O를 지나는 직선 AB를 따라 움직이고 일반 자동차는 포물선을 따라 점 A′에서 점 O로 움직인 후 직선 OB를 따라 움직인다. $t=0$초일 때 자율주행 자동차의 좌표는 $(-200,\ 0)$이고 일반 자동차의 좌표는 $(-200,\ 100)$이다. 차로의 폭 및 자동차의 길이와 폭은 무시하며 점 O에서 $(1,\ 0)$까지의 거리는 1m이다.



(1) 일반 자동차의 속도의 x성분이 $v_x(t) = t$라고 하자. 자율주행 자동차는 11m/s의 일정한 속력으로 움직인다면, 일반 자동차가 합류점에 진입하는 순간 두 자동차 사이의 거리를 구하시오.

(2) 일반 자동차의 움직임이 문항 (1)과 같다고 할 때 일반 자동차가 합류점을 지난 시점으로부터 두 자동차가 같은 위치에 있게 되기까지 걸리는 시간을 구하시오.

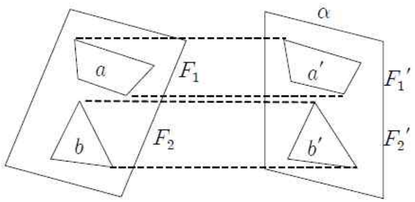
(3) 일반 자동차의 움직임이 문항 (1)과 같다고 할 때 자율주행 자동차는 두 자동차의 위치가 같아지는 것을 회피하기 위해, 일반 자동차가 합류점을 먼저 통과할 수 있도록 $t=2$초인 시점부터 일정한 가속도로 감속하려고 한다. 일반 자동차가 합류점에 진입하는 순간 두 자동차 사이의 거리가 10m 이상이 되도록 하는 자율주행 자동차의 가속도의 크기를 a라고 하자. a의 최솟값을 구하시오.

(4) 일반 자동차 속도의 x성분이 $v_x(t) = 3\sqrt{t}$라고 하자. 이 경우 문항 (3)과 같이 일반 자동차가 합류점을 먼저 통과할 수 있도록 자율주행 자동차가 $t=2$초인 시점부터 일정한 가속도로 감속하려고 한다. 일반 자동차가 합류점에 진입하는 순간 두 자동차 간의 거리가 10m 이상이 되도록 하는 자율주행 자동차의 가속도의 크기를 b라고 할 때, b의 최솟값이 문항 (3)의 a의 최솟값보다 큰지 작은지 비교하시오.

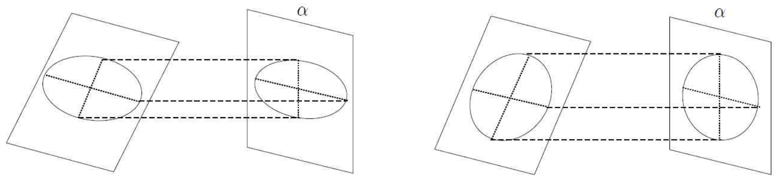
[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하여라.

한 평면 위의 도형과 그 평면과 수직이 아닌 평면 α에 대해, 도형과 그 도형의 평면 α 위로의 정사영 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다.

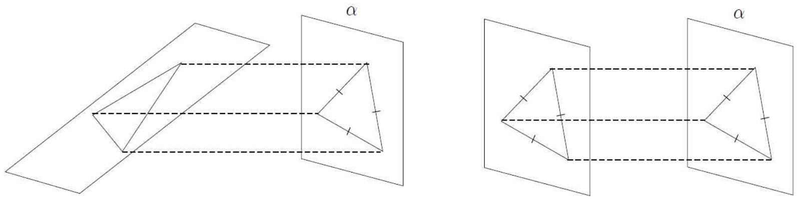
(가) 한 평면 위의 두 도형 F_1, F_2의 넓이를 각각 a, b라 하고, F_1, F_2의 평면 α 위로의 정사영 $F_1{}'$, $F_2{}'$의 넓이를 각각 a', b'라 할 때 $a : b = a' : b'$ 이 성립한다.



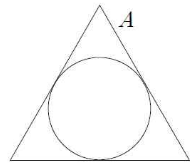
(나) 원의 평면 α 위로의 정사영은 타원 또는 원이다. 타원의 평면 α 위로의 정사영은 타원 또는 원이다. 임의의 타원에 대해, 주어진 타원의 평면 α 위로의 정사영이 원이 되는 평면 α가 존재한다.



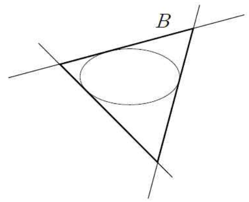
(다) 임의의 삼각형에 대해, 주어진 삼각형의 평면 α 위로의 정사영이 정삼각형이 되는 평면 α가 존재한다. 정삼각형의 평면 α 위로의 정사영이 정삼각형이 되는 경우, 주어진 정삼각형과 평면 α는 평행하다.



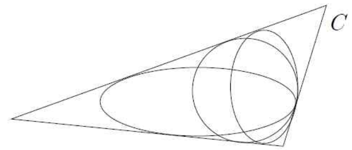
(1) 넓이가 π인 원에 외접하는 정삼각형 A의 넓이 a를 구하시오.



(2) 넓이가 π인 타원에 접하는 세 직선이 정삼각형 B를 이루며 이 정삼각형은 타원을 내부에 포함한다고 하자. 원에 외접하는 삼각형 중 넓이가 가장 작은 삼각형은 정삼각형이라는 사실을 이용하여, B의 넓이 b는 위 문항 (1)에서 구한 a보다 크다는 것을 설명하시오.



(3) 넓이가 c로 주어진 삼각형 C의 내부에 있고 삼각형의 세 변이 접선이 되는 타원 또는 원 중 넓이가 가장 큰 것의 넓이를 m이라 할 때 $\dfrac{m}{c}$을 구하시오.



[문제 1]

(1) 처음 두 개의 수는 크기순으로 $a_1 < a_2$라 하고, 나머지 8개는 임의로 나열한 경우이므로

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2 \times 8!}{10!} = \dfrac{1}{2}$이다.

(2) 두 사건 A, B는 종속이다. 그 근거는 다음과 같다.

사건 B의 확률도 1-1과 마찬가지로 $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$이다.

그런데 $a_1 < a_2 < a_3$, 즉 사건 $A \cap B$의 확률은 $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_3 \times 7!}{10!} = \dfrac{1}{6}$이고

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이기 때문이다.

여기서 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

(3) 처음 네 개를 크기 순으로 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$라 하면 된다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(C) = \dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_4 \times 6!}{10!} = \dfrac{1}{24}$이다.

(4) (1)~(3)에서

$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1$, $\mathrm{P}(X \geq 2) = \mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X \geq 3) = \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X \geq 4) = \mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{24}$

따라서 $\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(X \geq 2) - \mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2) = \mathrm{P}(X \geq 2) - \mathrm{P}(X \geq 3) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=3) = \mathrm{P}(X \geq 3) - \mathrm{P}(X \geq 4) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{8}$

$\cdots\cdots$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{10} k\mathrm{P}(X=k) > 1 \times \mathrm{P}(X=1) + 2 \times \mathrm{P}(X=2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} > 1$$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{10} k\mathrm{P}(X=k) < 1 \times \mathrm{P}(X=1) + 2 \times \mathrm{P}(X=2) + 3 \times \mathrm{P}(X=3) + 10 \times \mathrm{P}(X \geq 4)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{10}{24} = \frac{47}{24} < 2$$

$\therefore\ 1 < \mathrm{E}(X) < 2$

[문제 2]

(1) 일반 자동차의 t초 후의 위치의 x좌표는 $x(t) = \displaystyle\int_0^t s\,ds - 200 = \frac{1}{2}t^2 - 200$ 이므로

합류점에 도착하는 시간은 $\dfrac{1}{2}t^2 = 200$ 에서 $t = 20$초 이다.

이 시각에 자율주행 자동차의 위치는 $-200 + \displaystyle\int_0^{20} 11\,dt = 20$ 이다.

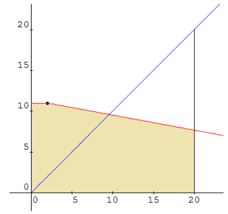
따라서 자율주행 자동차가 일반 자동차 보다 20m 앞에 있고, 구하는 거리는 20m 이다.

(2) 출발 후 두 자동차의 위치의 x좌표가 같아지는 시각 t는

$\displaystyle\int_0^t s\,ds = \int_0^t 11\,ds$, $\dfrac{1}{2}t^2 = 11t$, $t = 22$초

따라서 합류점(O)를 지난 시간으로 부터 2초 후 이다.

(3) 오른쪽 그림과 같이 (시간)-(속도) 의 그래프에서

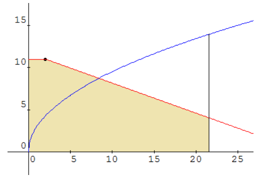


$$22 + \int_2^{20} \{-a(t-2) + 11\}\,dt \leq 190$$

$220 - 162a \leq 190$, $a \geq \dfrac{5}{27}$

구하는 a의 최솟값은 $\dfrac{5}{27}$이다.

(4) 일반 자동차가 합류점에 도달한 시각 t는



$\displaystyle\int_0^t 3\sqrt{s}\,ds = \left[2s^{\frac{3}{2}}\right]_0^t = 2t^{\frac{3}{2}} = 200$, $t = 10^{\frac{4}{3}}$

자율주행 자동차의 주행거리는

$$22 + \int_2^{10^{\frac{4}{3}}} \{-b(t-2) + 11\}\,dt$$

$= 220 - \dfrac{1}{2}(10^{\frac{4}{3}} - 2)^2 b \leq 190$, $b \geq \dfrac{60}{(10^{4/3} - 2)^2}$

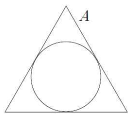
이제 $a = \dfrac{5}{27} = \dfrac{60}{324}$이므로 324와 $(10^{4/3} - 2)^2$의 대소를 비교하자.

$10^{4/3} = 10\sqrt[3]{10} > 20$이므로 $324 = 18^2 = (20-2)^2 > (10^{4/3} - 2)^2$이다.

따라서 $\dfrac{5}{27} < \dfrac{60}{(10^{4/3} - 2)^2}$, 즉 b의 최솟값이 문항 (3)의 a의 최솟값보다 크다.

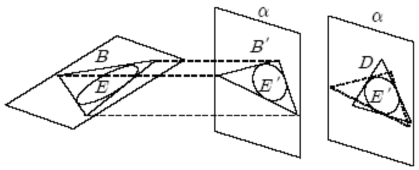
[문제 3]

(1) 원의 넓이가 π일 때, 반지름은 1이다.
이 원에 외접하는 정삼각형의 높이는 3, 변의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로
정삼각형의 넓이는 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$이다.

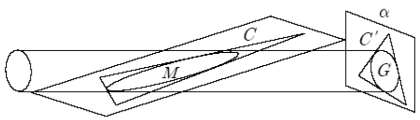


(2) 주어진 정삼각형과 타원을 각각 B, E라 하자.
제시문 (나)에 의하여 E의 평면 α 위로의 정사영 E'가 원이 되도록 할 수 있으며 평면 α는 도형 B, E가 있는 평면과 평행하거나 수직이 아니다. 이때 정삼각형 B의 평면 α 위로의 정사영 B'는 원 E'에 외접하는 삼각형이며, 평면 α는 B와 평행하지 않으므로 (다)에 의하여 B'는 정삼각형이 아니다. 따라서 B'의 넓이는 원 E'에 외접하는 정삼각형 D의 넓이보다 크다. 따라서 제시문 (가)에 의하여

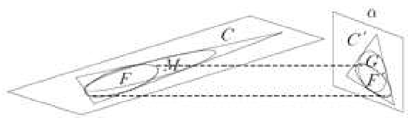
$$\frac{b}{\pi}=\frac{(B\text{의 넓이})}{(E\text{의 넓이})}=\frac{(B'\text{의 넓이})}{(E'\text{의 넓이})}>\frac{(D\text{의 넓이})}{(E'\text{의 넓이})}=\frac{a}{\pi},\ \therefore\ b>a$$



(3) 제시문 (다)에 따라 삼각형 C의 평면 α 위로의 정사영 C'가 정삼각형이 되도록 할 수 있다.
정삼각형 C'의 내접원을 G라 하고, M을 G를 포함하며 평면 α와 수직인 원기둥을 삼각형 C가 있는 평면으로 자른 단면이라 하자. M은 C의 내부하는 타원 또는 원이며, M의 평면 α 위로의 정사영은 C'의 내접원 G이다.



C에 내접하는 타원 또는 원 F의 평면 α 위로의 정사영 F'는 정삼각형 C'에 내접하는 타원 또는 원이다.
문항 (2)에 의하여 정삼각형 C'에 내접하는 타원 또는 원 중 G의 넓이가 가장 크다.



따라서 (가)에 의하여 삼각형 C에 내접하는 타원 또는 원 중 M의 넓이가 가장 크다. 그러므로

$$\frac{m}{c}=\frac{(M\text{의 넓이})}{(C\text{의 넓이})}=\frac{(G'\text{의 넓이})}{(C'\text{의 넓이})}=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$