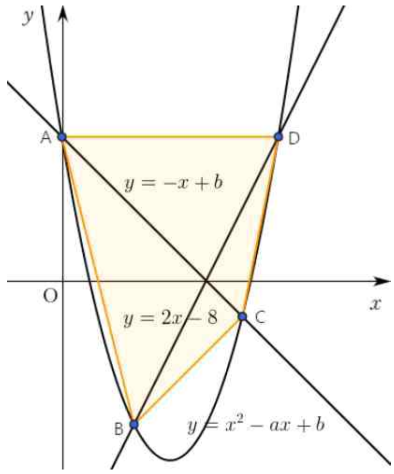
성신여자대학교

2020학년도 자연계 논술모의 기출

[문제 1] a, b가 양수일 때, 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=-x+b$와 만나는 두 점을 A, C라 하고, 직선 $y=2x-8$과 만나는 두 점을 B, D라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}$는 x축과 평행하고, $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{2}$라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

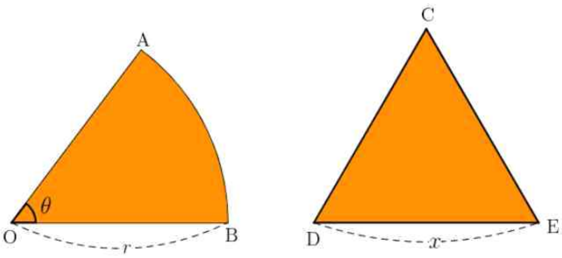


(1) $\overline{\mathrm{AD}}$가 x축과 평행함을 이용하여 b를 a의 식으로 나타내시오.

(2) a, b의 값을 각각 구하시오.

(3) 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.

[문제 2] 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ라디안인 부채꼴 OAB와 둘레의 길이가 같은 정삼각형 CDE의 한 변의 길이를 x라고 하자. (단, $r>0$, $0<\theta<2\pi$) 다음 물음에 답하시오.



(1) x를 r, θ의 식으로 나타내시오.

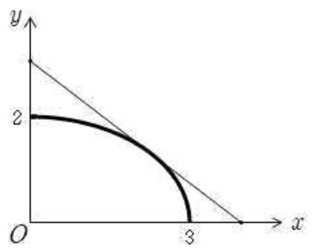
(2) 부채꼴 OAB의 넓이를 S, 정삼각형 CDE의 넓이를 T라 할 때, $f(\theta)=\dfrac{T}{S}$인 θ의 함수 $f(\theta)$를 구하시오.

(3) $f(\theta)$가 최솟값을 가지는 θ의 값과 그때 $f(\theta)$의 값을 구하시오.

[문제 3] 매개변수 t $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$로 나타낸 곡선

$$x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.



(1) 이 곡선 위의 $t = \frac{5\pi}{12}$에 대응되는 점의 x좌표를 $a\sqrt{2} + b\sqrt{6}$으로 나타낼 때 유리수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 이 곡선 위의 $t = \alpha$에 대응되는 점에서 접하는 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 α에 대한 식으로 나타내시오.

(3) 이 곡선 위의 $t = \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$에 대응되는 점에서 접하는 접선이 x축과 y축에 의해 잘려서 만들어지는 선분의 길이가 $2\sqrt{7}$일 때, α의 값을 구하시오.

[문제 4] 안이 들여다보이지 않는 상자에 모양과 크기가 같아서 구분할 수 없는 n개의 탁구공이 들어있는데, 그 중 6개는 노란색, 나머지는 모두 흰색이다. 이 상자에서 임의로 꺼낸 4개의 탁구공 중에서 2개는 노란색, 2개는 흰색 공일 확률을 p_n이라 할 때, p_n의 최댓값을 구하려고 한다. (단, $n \geq 8$이다.)

다음 물음에 답하시오.

(1) p_n의 값을 n의 식으로 나타내시오.

(2) $p_n \leq p_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n의 범위를 구하시오.

(3) p_n의 최댓값을 구하시오.

[문제 1]

(1) $y=x^2-ax+b=x(x-a)+b$ 이므로 $\mathrm{D}(a,\ b)$이다.

직선 $y=2x-8$에서 $b=2a-8$이다.

(2) $x^2-ax+b=2x-8$에서 $x^2-(2+a)x+2a=0$이므로 $\mathrm{B}(2,\ -4)$이다.

$x^2-ax+b=-x+b$에서 $x^2=(a-1)x$이므로 $\mathrm{C}(a-1,\ -a+1+b)=(a-1,\ a-7)$이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{2}$ 에서 $(a-3)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로, $a=6$이고 $b=2a-8=4$이다.

(3) $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{D}(6,\ 4)$, $\mathrm{B}(2,\ -4)$ 에서 삼각형 ADB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times8=24$

$\mathrm{B}(2,\ -4)$, $\mathrm{C}(5,\ -1)$에서 직선 BC의 방정식은 $y=x-6$이고

D에서 이 직선에 이르는 거리는 $2\sqrt{2}$이므로, 삼각형 BCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=6$

따라서 구하는 사각형 ABCD의 넓이는 $24+6=30$ 이다.

[문제 2]

(1) 부채꼴의 둘레는 $2r+r\theta$이므로 $x=\dfrac{2+\theta}{3}r$ 이다.

(2) $T=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=\dfrac{\sqrt{3}(2+\theta)}{36}r^2$, $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$이므로 $f(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}(2+\theta)^2}{18\theta}$ 이다.

(3) $f(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}(2+\theta)^2}{18\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\left(4+\dfrac{4}{\theta}+\theta\right)$인데,

$$\frac{4}{\theta}+\theta\geq2\sqrt{\frac{4}{\theta}\times\theta}=4,\ (\text{등호는 } \frac{4}{\theta}=\theta,\ \text{즉 } \theta=2\text{일 때})$$

이므로 $\theta=2$일 때 최솟값 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$이다.

[문제 3]

(1) $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$이므로

$$x=-\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{6},\ \therefore\ a=-\frac{3}{4},\ b=\frac{3}{4}$$

(2) 주어진 곡선은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$이므로 접선의 방정식은 $\frac{\cos\alpha}{3}x+\frac{\sin\alpha}{2}y=1$이다.

따라서 접선과 좌표축의 교점은 $\left(\frac{3}{\cos\alpha},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{2}{\sin\alpha}\right)$이다.

(3) $\left(\frac{3}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{2}{\sin\alpha}\right)^2=(2\sqrt{7})^2$을 풀면

$$9\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=28\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\ 5\sin^2\alpha+4=28\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$$

$\sin^2\alpha=t$라 하면 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$에서 $0<t<\frac{1}{2}$이고,

$$5t+4=28t(1-t),\ 28t^2-23t+4=0,\ (4t-1)(7t-4)=0$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{4},\ \sin\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha=\frac{\pi}{6}$$

[문제 4]

(1) $p_n=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_{n-6}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_4}=180\frac{(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

(2) $\frac{(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\le\frac{(n-5)(n-6)}{(n+1)n(n-1)(n-2)}$ 을 풀면

$$\frac{n-7}{n-3}\le\frac{n-5}{n+1},\ (n+1)(n-7)\le(n-5)(n-3),\ \therefore\ n\le 11$$

(3) p_n이 최댓값이면 $p_{n-1}\le p_n$이므로 $n\le 12$이고, $p_n\ge p_{n+1}$이므로 $n\ge 11$이다.

$$p_{12}=\frac{180\times6\times5}{12\times11\times10\times9}=\frac{5}{11},\ p_{11}=\frac{180\times5\times4}{11\times10\times9\times8}=\frac{5}{11}$$

구하는 최댓값은 $p_{11}=p_{12}=\frac{5}{11}$이다.