연세대학교 2019학년도 수시모집 논술시험 문제(수학)

※ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

[제시문 1]

좌표평면 위의 두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$로부터 거리의 합이 10인 타원 C가 있다. 타원 C 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 초점 $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 하고, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 하자.

[1-1] 타원 C의 방정식을 구하시오.

[1-2] $\cos\alpha=\frac{7}{8}$ (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)일 때 선분 PF'의 길이를 구하시오.

[1-3] $\cos\alpha=\frac{7}{8}$ (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)일 때 $\tan\beta$의 값을 구하시오.

[제시문 2] 출제오류로 전원 만점 처리된 문항입니다.

실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $\frac{1}{3}\le f(x)\le\frac{2}{3}$

(나) $f(x+\pi)=\dfrac{1+\sqrt{6f(x)-9\{f(x)\}^2}}{3}$

(다) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x)-1\}dx=\pi$

[2] 정적분 $\displaystyle\int_{2019\pi}^{2023\pi}f(x)dx$의 값을 구하시오.

[제시문 3]

자연수 1부터 $35^2(1225)$까지의 숫자가 다음과 같이 나열되어 있다.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 35 \\
36 & 37 & 38 & 39 & \cdots & 70 \\
71 & 72 & 73 & 74 & \cdots & 105 \\
106 & 107 & 108 & 109 & \cdots & 140 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1191 & 1192 & 1193 & 1194 & \cdots & 1225
\end{array}$$

위와 같이 왼쪽 아래부터 오른쪽 위로의 대각선 방향으로 순서를 정하여 n번째 숫자를 $f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 1125)$으로 정의한다.

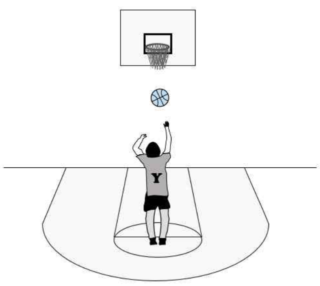
예) $f(1)=1$, $f(2)=36$, $f(3)=2$, $f(4)=71$, $f(5)=37$, $f(6)=3$, $\cdots$

[3-1] $f(300)$의 값을 구하시오.

[3-2] $f(n)=n$을 만족시키는 모든 n의 값을 찾으시오.

[제시문 4]

농구 선수 세 명이 있다. 슛을 성공할 확률이 $\dfrac{8}{10}$인 선수가 두 명, 슛을 성공할 확률이 $\dfrac{9}{10}$인 선수가 한 명있다. 세 선수가 임의의 순서로 슛을 한 번씩 시도 했을 때, 첫 번째 선수와 두 번째 선수는 성공했으나 세 번째 선수는 성공하지 못했다. (단, 각 선수가 슛을 성공할 확률은 항상 일정하고, 슛을 성공하는 사건은 서로 독립이다.)



[4-1] 위와 같은 결과가 나올 확률을 구하시오.

[4-2] 세 번째 선수가 슛 성공 확률 $\dfrac{9}{10}$인 선수일 확률을 구하시오.

해설

[1-1] $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$ 이므로 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10-\sqrt{(x-4)^2+y}$$

제곱하여 정리하면

$$(x+4)^2+y^2=100-20\sqrt{(x-4)^2+y^2}+(x-4)^2+y^2$$

$$16x-100=-20\sqrt{(x-4)^2+y^2},$$

$$4x-25=-5\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

다시 제곱하여 정리하면

$$16x^2-200x+25^2=25(x^2-8x+16+y^2),$$

$$9x^2+25y^2=25\times 9,$$

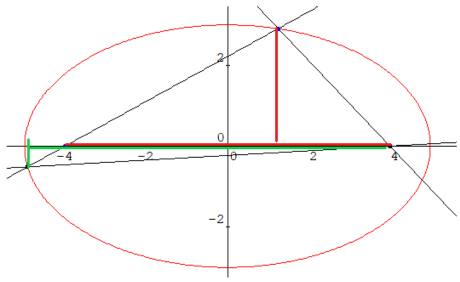
$$\therefore\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

[1-2] $\overline{\mathrm{PF'}}=d$라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=10-d$, $\overline{\mathrm{FF'}}=8$이므로

$d\sin\alpha=(10-d)\sin\beta$이고, $\cdots$①

$d\cos\alpha-(10-d)\cos\beta=\pm 8,$

$(10-d)\cos\beta=d\cos\alpha\pm 8 \quad\cdots$②



①, ②를 제곱하여 변끼리 더하면

$$(10-d)^2=64+d^2\pm 16d\cos\alpha \qquad \left(\cos\alpha=\frac{7}{8}\text{이므로}\right)$$

$$=64+d^2\pm 14d$$

$$d=\frac{36}{20\pm 14},$$

$$\therefore\ d=6 \text{ 또는 } d=\frac{18}{17}$$

[1-3] $\cos\alpha=\frac{7}{8}$이면 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$이다.

①/②에서 $\tan\beta=\dfrac{d\sin\alpha}{d\cos\alpha\pm 8}=\dfrac{\sqrt{15}\,d}{7d\pm 64},$

$d=6$ 또는 $d=\frac{18}{17}$이므로 $\tan\beta=-\dfrac{3\sqrt{15}}{11}$ 또는 $\tan\beta=\dfrac{9\sqrt{15}}{607}$

[2] (나) $f(x+\pi)=\dfrac{1+\sqrt{6f(x)-9\{f(x)\}^2}}{3}$을 변형하면

$$\begin{aligned}
&3f(x+\pi)=1+\sqrt{1-\{3f(x)-1\}^2},\\
&\{3f(x+\pi)-1\}^2=1-\{3f(x)-1\}^2\\
&3f(x+2\pi)=1+\sqrt{1-\{3f(x+\pi)-1\}^2}\\
&\qquad=1+\sqrt{1-(1-\{3f(x)-1\}^2)}\\
&\qquad=1+\sqrt{\{3f(x)-1\}^2}\\
&\qquad=1+\{3f(x)-1\}=3f(x)
\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 주기 2π인 주기함수이다.

(다)에서 $\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x)-1\}dx=3\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-2\pi=\pi$ 이므로,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi,\quad \therefore\ \int_{2019\pi}^{2023\pi}f(x)dx=2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\pi$$

출제 오류 내용은 다음과 같다.

$\{3f(x+\pi)-1\}^2=1-\{3f(x)-1\}^2$의 양변을 $-\pi$에서 π까지 정적분하면

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x+\pi)-1\}^2dx=2\pi-\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x)-1\}^2dx$$

$f(x)$는 주기가 2π이므로 $\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x+\pi)-1\}^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x)-1\}^2dx$, 즉 $\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x)-1\}^2dx=\pi$ 이다.

(가)에서 $0\le 3f(x)-1\le 1$이므로 $0\le\{3f(x)-1\}^2\le 3f(x)-1\le 1$이다.

$$\pi=\int_{-\pi}^{\pi}\{3f(x)-1\}^2dx\le\int_{\pi}^{\pi}\{3f(x)-1\}dx=\pi\quad\text{((다)에서)}$$

따라서 $\{3f(x)-1\}^2=\{3f(x)-1\}$이어야만 하는데, $f(x)$는 연속이므로 $f(x)=\dfrac{1}{3}$이거나 $f(x)=\dfrac{2}{3}$이다.

$$f(x)=\frac{1}{3}\text{이면 }\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{3}\pi,\quad f(x)=\frac{2}{3}\text{이면 }\int_{p-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{4}{3}\pi$$

이므로 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi$에 모순이다.

즉, 조건 (가), (나), (다)를 모두 만족하는 연속함수 $f(x)$는 존재하지 않아서 제시문에 오류가 있었다.

[3-1] 제1행의 수 1, 2, 3, ⋯, 35는 차례로

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ⋯ 이다.

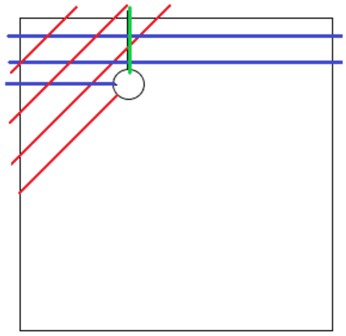
$300=1+2+\cdots+24=\sum_{k=1}^{24} k$ 이므로 $f(300)=24$이다.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 & \cdots & 70 \\ 71 & 72 & 73 & 74 & \cdots & 105 \\ 106 & 107 & 108 & 109 & \cdots & 140 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1191 & 1192 & 1193 & 1194 & \cdots & 1225 \end{array}$$

[3-2] 수의 배열에서 $f(n)+f(1226-n)=1226$임을 알 수 있다.

따라서 $f(n)=n$이면 $f(1226-n)=1226-n$이므로 $n \le \frac{1226}{2}=613$ 일 때

$f(n)=n$을 만족하는 n을 먼저 구하자.



제i행, 제j열의 수는 제$(i+j-1)$번째 대각선의 수이므로

$n=$(제$(i-1)$행, 제35열)$+j=35(i-1)+j$

$f(n)=$(제$(i+j-2)$번째 대각선의 마지막수)$+j=\frac{1}{2}(i+j-2)(i+j-1)+j$

$\therefore\ 70(i-1)=(i+j-2)(i+j-1)$

여기서 절반인 $2 \le i+j \le 36$인 경우를 구한다.

좌변은 70의 배수이고, 우변은 연속한 두 수의 곱이다.

$0\times1=0=70\times0$, $(i,\ j)=(1,\ 1)$, $n=1$

$14\times15=210=70\times3$, $(i,\ j)=(4,\ 12)$, $n=117$

$20\times21=420=70\times6$, $(i,\ j)=(7,\ 15)$, $n=225$

$34\times35=1190=70\times17$, $(i,\ j)=(18,\ 18)$, $n=613$

그리고 대칭 위치 n과 대칭 위치인 $1226-n$: 1225, 1109, 1001, 613

∴ 1, 117, 225, 613, 1001, 1109, 1225

[4-1] 세 선수를 A, B, C 라 하고, 슛에 성공할 확률을 $\frac{8}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{9}{10}$이라고 하자.

성공	성공	실패	확률
A	B	C	각각 $\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)$
B	A	C	
A	C	B	각각 $\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)$
B	C	A	
C	A	B	
C	B	A	

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{3}\times\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)=\frac{352}{3000}=\frac{44}{375}$ 이다.

[4-2] 조건부 확률에 의하여 구하는 확률은 다음과 같다.

$$\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{3}\times\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)}=\frac{64}{352}=\frac{2}{11}$$