연세대학교 2017학년도 논술 고사

[2017 기출]

문항1.

[가] 다항함수 $h(x)$ 위의 점 $(a, h(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = h'(a)(x-a) + h(a)$$

[나] 다항함수 $h(x)$가

$$h(x) = (x-a)^n g(x) \text{ (단, } n\text{은 자연수이고, } g(x)\text{는 다항함수이다.)}$$

로 나타내어질 때, 방정식 $h(x)=0$는 $x=a$를 근으로 갖는다고 한다.
특히, $n \geq 2$이면 방정식 $h(x)=0$은 $x=a$에서 중근을 갖는다고 한다.

[1-1] 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서 접선의 방정식을 구하시오. [4점]

[1-2] 다항함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=L(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)-L(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가짐을 보이시오. [8점]

[1-3] 다항함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선을 $y=l(x)$라 하자. 방정식 $f(x)-l(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가질 때, 직선 $y=l(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선임을 보이시오. [8점]

문항3.

[가] 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$에서의 접선을 l_θ라 할 때, 집합 A를 $A=\{l_\theta \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$라 하자.

[나] 좌표평면 위의 점 P가 집합 A의 원소 중 오직 m개의 원소와 만나도록 하는 점 P의 집합을 U_m이라 하자. 예를 들어, 집합 U_0은 집합 A의 어떤 원소와도 만나지 않는 점의 집합이다. (단, m은 음이 아닌 정수이다.)

[다] 좌표평면 위의 점 (a, b)가 집합 U_2의 원소일 때, 점 (a, b)를 지나는 원 C 위의 서로 다른 두 접선의 접점을 이은 직선을 $L(a, b)$라 하자.

[2-1] 음이 아닌 정수 m에 대하여 집합 U_m을 구하시오. [10점]

[2-2] 집합 B를 $B=\{L(a, b) \mid a^2+b^2=10^2, (a, b) \in U_2\}$라 하자. 좌표평면 위의 점 P가 집합 B의 원소 중 오직 m개의 원소와 만나도록 하는 점 P의 집합 V_m을 구하시오. (단, m은 음이 아닌 정수이다.) [10점]

문항3.

세 함수 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $p(x) \le q(x) \le r(x)$이고, $\lim_{x \to a} p(x) = \lim_{x \to a} r(x) = \alpha$이면 $\lim_{x \to a} q(x) = \alpha$이다. (단, α는 실수이다.)

[3-1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1)=k$이고 $\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f(0)$을 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [8점]

[3-2] 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $g(x_1) \le g(x_2)$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{n}{2(n+1)} \cdot g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$이다.

[3-2-1] $g(0)$의 값을 구하시오. [4점]

[3-2-2] $\lim_{m \to \infty} \dfrac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}}$의 값을 구하시오. (단, m은 자연수이다.) [8점]

[문제 해설]

[Ⅰ-1]

$y=x^3+1$에서 $y'=3x^2$, $y'_{x=1}=3$이다. 따라서 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1,2)$에서 접선의 방정식은

$$y=3(x-1)+2,\ y=3x-1$$

이다.

[Ⅰ-2]

다항함수 $f(x)$의 최고 차수가 이차 이상의 함수일 때

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)+b(x-a)+c\ \ (Q(x)\text{는 다항함수, } b, c\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있다. 따라서

$$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+b,\ f'(a)=b,\ f(a)=c$$

이다. 그러므로

$$L(x)=b(x-a)+c,\ f(x)-L(x)=(x-a)^2Q(x)$$

이다. 따라서 방정식 $f(x)-L(x)=0$은 $x=a$에서 중근을 가진다.

[대학 예시 답안]

$y=L(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$이므로 다항함수

$$G(x)=f(x)-L(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$

는 $G(a)=0$과 $G'(a)=f'(a)-f'(a)=0$을 만족한다.

$G(a)=0$이면 $G(x)=(x-a)g(x)$(여기서 $g(x)$는 다항함수)로 표현할 수 있다.

그러면 $G'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$ 이고 $G'(a)=g(a)=0$이므로 $g(x)=(x-a)k(x)$(여기서 $k(x)$는 다항함수)로 나타낼 수 있다.

$G(x)=(x-a)g(x)=(x-a)^2k(x)$이므로 $f(x)-L(x)=0$은 $x=a$에서 중근을 가진다.

[Ⅰ-3]

점 $(a, f(a))$을 지나는 직선 $y=l(x)$의 기울기를 m이라 두면 $l(x)=m(x-a)+f(a)$이므로 $m=f'(a)$임을 보이면 된다. 방정식 $f(x)-l(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가지므로

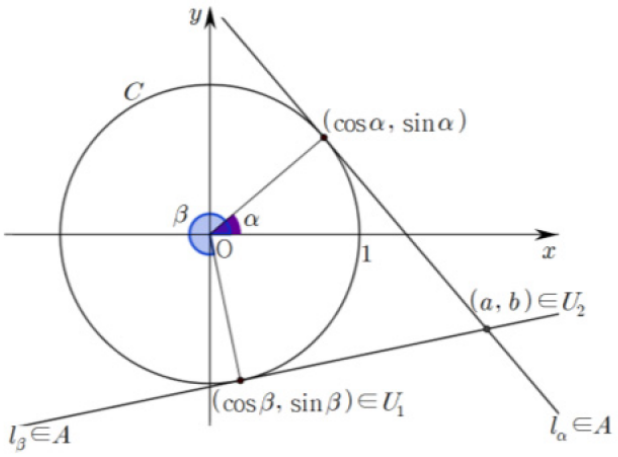
$$f(x)-l(x)=(x-a)^2 g(x) \quad (g(x)\text{는 다항함수})$$

로 나타낼 수 있다. 그러므로

$$f'(x)-l'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)\,,\ f'(a)-l'(a)=0\,,\ f'(a)=l'(a)=m$$

이다. 따라서 $l(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$이므로 직선 $y=l(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이다.

[2-1]

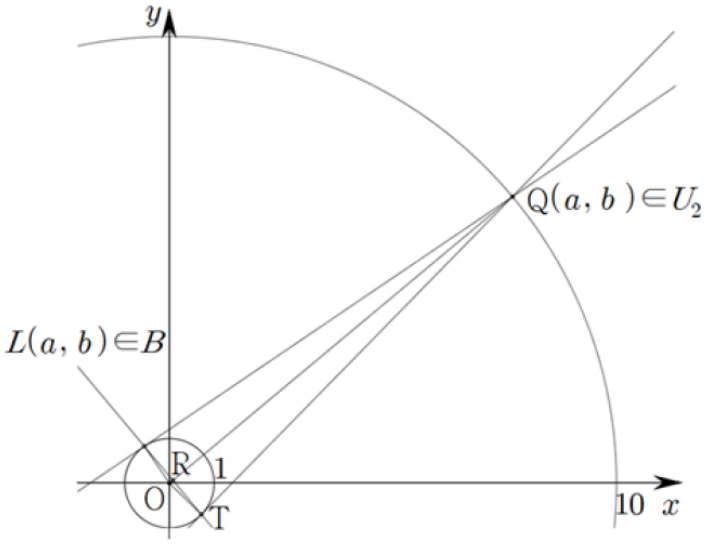


원 C 밖의 한 점에서는 원 C에 접선을 두 개 그을 수 있고, 원 C 위의 점에서는 원 C에 접선을 한 개 밖에 그을 수 없으며, 원 C 내부의 점에서는 원 C에 접선을 그을 수 없다. 따라서

$$U_0=\{(a, b)\mid a^2+b^2<1\},$$
$$U_1=\{(a, b)\mid a^2+b^2=1\},$$
$$U_2=\{(a, b)\mid a^2+b^2>1\},$$
$$U_m=\varnothing \quad (m\text{은 } 3 \text{ 이상의 정수})$$

이다.

[2-2]



$a^2+b^2=10^2$인 임의의 점 $\mathrm{Q}(a,b)\in U_2$에 대하여, 점 Q에서 원 C에 그은 한 접선의 접점을 점 T, 직선 $L(a,b)$와 선분 OQ의 교점을 점 R라 하자. 그러면

$\triangle\mathrm{ORT}\backsim\triangle\mathrm{OTQ}$이므로 $\overline{\mathrm{OT}}:\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{OT}}$, $1:10=\overline{\mathrm{OR}}:1$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{10}$이다.

그러므로 원 $x^2+y^2=\dfrac{1}{100}$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{10}\cos\theta,\ \dfrac{1}{10}\sin\theta\right)$에서의 접선을 l'_θ라 하면 $B=\{l'_\theta \mid 0\le\theta<2\pi\}$이다. 따라서 [2-1]의 풀이와 마찬가지 방법에 의해서

$$V_0=\left\{(a,b)\mid a^2+b^2<\frac{1}{100}\right\},$$

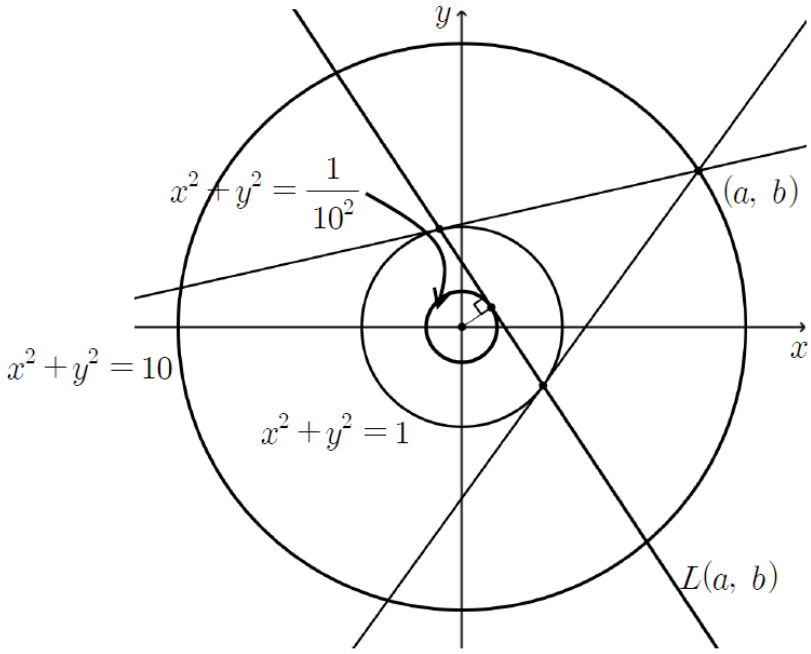
$$V_1=\left\{(a,b)\mid a^2+b^2=\frac{1}{100}\right\},$$

$$V_2=\left\{(a,b)\mid a^2+b^2>\frac{1}{100}\right\},$$

$$V_m=\varnothing\ \ (m\text{은 3 이상의 정수})$$

이다.

[다른 풀이]



점 $(a,\ b)$에서 원 C에 그은 서로 다른 두 접선의 접점을 이은 직선 $L(a,b)$의 방정식은 $ax+by=1$이다. 한편, $a^2+b^2=10^2$이므로 원점에서 직선 $L(a,b)$까지의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{10}$$

으로 일정하다. 따라서

$$V_0=\left\{(a,b)\,|\,a^2+b^2<\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_1=\left\{(a,b)\,|\,a^2+b^2=\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_2=\left\{(a,b)\,|\,a^2+b^2>\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_m=\varnothing,\ m\geq 3$$

이다.

(참고) 원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 (α, β)에서 원에 그은 두 접선의 접점을 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 할 때, 직선AB의 방정식은 $\alpha x+\beta y=r^2$ 이다.

(증명) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에서 접선의 방정식은 각각

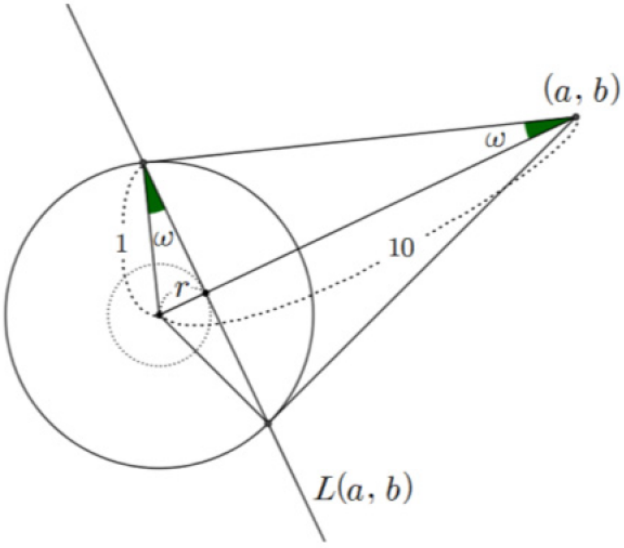
$$x_1 x+y_1 y=r^2,\ x_2 x+y_2 y=r^2$$

이다. 두 접선은 모두 (α, β)를 지나므로

$$x_1 \alpha+y_1 \beta=r^2,\ x_2 \alpha+y_2 \beta=r^2$$

이다. 그러므로 $\alpha x+\beta y=r^2$는 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$,$\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선이다.

[대학 예시 답안]



그림에서 $\sin\omega=\dfrac{1}{10}$, 따라서 원점과 $L(a, b)$ 사이의 거리 $r=\dfrac{1}{10}$ 이다.

따라서, 모든 $L(a, b)$는 반지름이 $\dfrac{1}{10}$ 인 원에 접하는 직선이다.

$$V_0=\left\{(a, b) \mid a^2+b^2<\frac{1}{10^2}\right\},\ V_1=\left\{(a, b) \mid a^2+b^2=\frac{1}{10^2}\right\},$$

$$V_2=\left\{(a, b) \mid a^2+b^2>\frac{1}{10^2}\right\},\ V_m=\varnothing,\ m \geq 3$$

[3-1]

$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

$$\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이다. 그러므로 $g(n)=\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)$이라 두면, 모든 자연수 n에 대하여 $g(n)=g(n-1)$이 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여

$$g(n)=g(n-1)=g(n-2)=\cdots=g(0)$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}g(n)=g(0),\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right\}=\frac{1}{2}f(1),\ f(0)=\frac{k}{2}$$

이다.

[다른 풀이]

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times f(1)$$

$$f\left(\frac{1}{2^2}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\times f\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이고 변변 곱하면

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{n+2}{n+1}\times f(1)$$

이다. 따라서 $f(0)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{k}{2}$ 이다.

[대학 예시 답안]

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이므로 $\frac{n+1}{n+2}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$. 여기서, $a_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$라 하면, $a_{n+1}=a_n$,

$a_1=\frac{1}{2}f(1)=\frac{k}{2}$ 즉, a_n은 공비가 1인 등비수열이다.

따라서 $a_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{k}{2}$ 이 되고 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{k(n+2)}{2(n+1)}$ 이다. 양변에 극한을 취하면

$f(0)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{k(n+2)}{2(n+1)}=\frac{k}{2}$.

[3-2-1]

$g\left(\frac{1}{2^n}\right)\le\frac{n}{2(n+1)}g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이므로 $(n+1)g\left(\frac{1}{2^n}\right)\le\frac{1}{2}ng\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이다. 그러므로 $h(n)=(n+1)g\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 이라 두면, 모든 자연수 n에 대하여 $0\le h(n)\le\frac{1}{2}h(n-1)$이다. 따라서

$$0\le h(n)\le\frac{1}{2}h(n-1)\le\left(\frac{1}{2}\right)^2h(n-2)\le\cdots\le\left(\frac{1}{2}\right)^nh(0)$$

이다. 그러므로

$$0\le\lim_{n\to\infty}h(n)\le\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^nh(0)\right\}=0,\ \lim_{n\to\infty}h(n)=0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}g\left(\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}h(n)=0$ 이다. 한편, 모든 자연수 n에 대하여, $0<\frac{1}{2^n}$ 이므로 $0\le g(0)\le g\left(\frac{1}{2^n}\right)$이다. 그러므로

$$0\le g(0)=\lim_{n\to\infty}g(0)\le\lim_{n\to\infty}g\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$$

이다. 따라서 $g(0)=0$ 이다.

[다른 풀이]

모든 자연수 n에 대하여 $0 \le \frac{1}{2^n}$ 이므로

$$\begin{aligned} 0 \le g(0) \le g\left(\frac{1}{2^n}\right) &\le \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+1} g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\le \frac{1}{2^2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} g\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right) \\ &\le \frac{1}{2^3} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} g\left(\frac{1}{2^{n-3}}\right) \\ &\quad \vdots \\ &\le \frac{1}{2^n} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times g\left(\frac{1}{2^0}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n+1} \times g(1) \end{aligned}$$

이고

따라서 $\lim_{m \to \infty} \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} = 0$ 이다.

$$0 \le g(0) \le \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n+1} \times g(1)$$

이다. 여기서 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n+1} \times g(1) = 0$ 이므로 [제시문3]에 의해 $g(0)=0$ 이다.

[대학 예시 답안]

$(n+1)g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2} n g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 이므로 $b_n = n g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$.

따라서 $b_n \le \frac{1}{2} b_{n-1} \le \frac{1}{2^2} b_{n-2} \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}} b_1 = \frac{1}{2^{n-1}} g(1)$. 즉 $g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \frac{g(1)}{n 2^{n-1}}$.

극한을 취하면

$$0 \le g(0) \le \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{g(1)}{n 2^{n-1}} = 0$$

따라서 $g(0)=0$.

$$0 \le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} = \frac{g\left(\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} \le \frac{2g(1)\ln 2}{\ln m}$$

이고 극한을 취하면 우측 항은 0으로 수렴하므로 [제시문 3]에 의해

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} = 0$$

이다.

[3-2-2]

임의의 자연수 m에 대하여 $2^{n-1} \le m < 2^n$인 자연수 n이 존재한다. 그러므로

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{m} \le \frac{1}{2^{n-1}}, \quad g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le g\left(\frac{1}{m}\right) \le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

이다. 한편, [3-2-1]에서 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)\, g\left(\frac{1}{2^n}\right) = h(n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n g(1), \quad g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{g(1)}{n+1}$$

이다. 그러므로

$$0 \le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} = m g\left(\frac{1}{m}\right) \le m g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{g(1)}{n} \quad \cdots\cdots (1)$$

이다. 한편, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{m}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{2}{m}$를 얻을 수 있고 $2^{n-1} \le m < 2^n$에서 $\ln m < n \ln 2$, $\frac{1}{n} < \frac{\ln 2}{\ln m}$를 얻을 수 있다. 이것을 (1)식에 적용하면

$$0 \le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} \le m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{g(1)}{n} < m \frac{2}{m} \frac{g(1)\ln 2}{\ln m} = \frac{2\ln 2}{\ln m} g(1)$$

그러므로

$$0 \le \lim_{m \to \infty} \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}} \le \lim_{m \to \infty} \frac{2\ln 2}{\ln m} g(1) = 0$$

[다른 풀이]

임의의 자연수 m에 대하여 $2^{n-1} \le m \le 2^n$인 자연수 n이 존재하여

$$0 \le g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le g\left(\frac{1}{m}\right) \le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdots ①$$

이다. 또한 [3-2-1]에서 $g(0)=0$이고 자연수 n에 대하여

$$0 \le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n} \times g(1) \cdots ②$$

이므로 ①, ②에 의해

$$0 \le \frac{g\left(\frac{1}{m}\right)-g(0)}{\frac{1}{m}} = m \times g\left(\frac{1}{m}\right) \le m \times g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le 2^n g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \frac{2^n}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n} \times g(1)$$

이 성립한다. $2^{n-1} \le m \le 2^n$에서 $m \to \infty$일 때, $n \to \infty$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n} \times g(1) = 0$이므로 [제시문3]에 의해

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g\left(\frac{1}{m}\right)-g(0)}{\frac{1}{m}} = 0$$

이다.

[대학 예시 답안]

문제[3-2-1] 풀이로부터 $g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \frac{g(1)}{n2^{n-1}}$ ……① 와 $g(0)=0$이 성립한다.

임의의 자연수 m에 대하여 어떤 자연수 n이 있어서 $2^{n-1} \le m < 2^n$ (즉, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{m} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ ……②)를 만족한다. 이 관계식으로부터

$$(n-1)\ln 2 \le \ln m < n\ln 2 \cdots\cdots ③,\ \frac{1}{n} < \frac{\ln 2}{\ln m} \cdots\cdots ④,\ \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{2}{m} \cdots\cdots ⑤$$

을 얻을 수 있다. 순서대로 ②, ①, ④, ⑤ 식을 적용하면

$$g\left(\frac{1}{m}\right) \le g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \frac{g(1)}{n2^{n-1}} < \frac{\ln 2}{\ln m}\frac{2}{m}g(1).$$

임을 알 수 있다.