[1. 수학 문항 (가)] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (20점)

(ㄱ) 자동차의 연비는 1리터(L)의 휘발유로 자동차가 달릴 수 있는 거리를 의미하고 단위는 km/L이다.

(ㄴ) 휘발유의 가격은 1리터(L)에 1500원이다.

(ㄷ) A 지점에서 B 지점까지 자동차로 가는 데에 드는 비용은 사용하는 만큼의 휘발유 가격에 유료도로, 유료터널 등을 지날 때에 지불하는 통행료를 더한 것이다.

(ㄹ) 가홍이가 A 지점에서 B 지점까지 자동차로 갈 수 있는 두 가지 경로가 있다. 거리가 40km인 경로 1에서 가홍이는 $v_1 = 50\text{km/h}$의 일정한 속력으로 자동차를 운행할 수 있고, 거리가 48km인 경로 2에서 가홍이는 $v_2\,[\text{km/h}]$의 일정한 속력으로 자동차를 운행할 수 있다. 그리고 경로 2에는 유료터널이 있어서 오전 7시부터 오후 9시까지는 1000원의 통행료를 지불해야 한다. A 지점에서 B 지점까지 자동차를 운행하는 동안에 신호 등에 걸리거나 통행료를 지불하는 등의 이유로 자동차의 속력이 잠시 변할 수도 있지만, 가홍이는 자동차의 속력이 경로에 따라 각각 일정하다고 가정하고 어느 경로로 가는 것이 비용이 적게 드는지 판단하려고 한다. 한편, 가홍이가 운전하는 자동차의 연비 $f\,[\text{km/L}]$는 자동차의 속력 $v\,[\text{km/h}]$의 함수이고 $f(v) = 16 - \frac{1}{5}|80 - v|$ 이다.

논제 1. (10점) 제시문 (ㄹ)에서 가홍이가 오전 5시에 A 지점을 출발할 경우, 경로 2를 택할 때의 비용이 경로 1을 택할 때의 비용보다 적으려면 v_2가 어떤 범위에 있어야 하는지 논술하시오.

논제 2. (10점) 제시문 (ㄹ)에서 가홍이가 오후 5시에 A 지점을 출발할 경우, 경로 2를 택할 때의 비용이 경로 1을 택할 때의 비용보다 적으려면 v_2가 어떤 범위에 있어야 하는지 논술하시오.

[2. 수학 문항 (나)] 제시문 (ㄱ)~(ㅁ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 그 구간에서의 최댓값을 $\max_{[0,1]} f(x)$라고 쓴다.

(ㄴ) 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $d(f,g)$를 닫힌구간 $[0,1]$에서 $|f(x)-g(x)|$의 최댓값으로 정의한다. 이를 수식으로 쓰면 다음과 같다.

$$d(f,g) = \max_{[0,1]} |f(x)-g(x)|$$

(ㄷ) 닫힌구간 $[0,1]$에서 정의된 연속 함수를 원소로 하는 집합 A에 대하여, 집합 $C(A)$를 다음과 같이 정의한다.

$$C(A) = \{(x,y) \in R^2 \mid y = f(x),\ 0 \le x \le 1,\ f \in A\}$$

(ㄹ) 모든 일차함수의 집합을 P라고 하자. 어떤 다항함수 $f(x)$에 대하여 집합 D_f를 다음과 같이 정의한다.

$$D_f = \{g \mid d(f,g) \le 1,\ g \in P\}$$

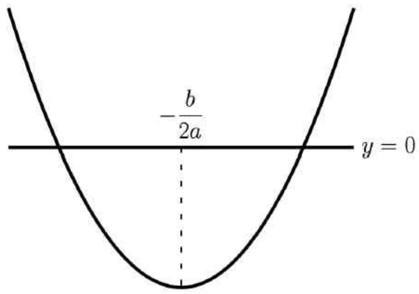
(ㅁ) "두 실수 a, b의 최댓값이 r보다 작거나 같다"와 동치인 명제는 "$a \le r$ 이고 $b \le r$"이다.

논제 1. (20점) $f(x) = x$라고 할 때, D_f에 대하여 제시문 (ㄷ)의 정의에 따라 만들어진 영역 $C(D_f)$의 면적이 무엇이 되는지 논술하시오.

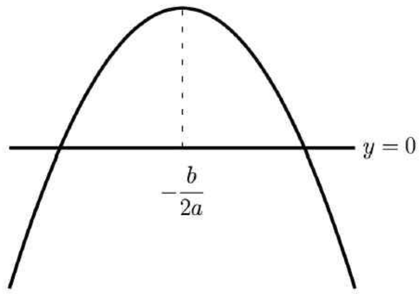
논제 2. (20점) $x=0$에서 0이 되는 모든 일차함수의 집합을 P_0이라고 하자. $f(x) = 2x^2$ 라고 할 때, D_f와 P_0의 교집합 $D_f \cap P_0$ 에 대하여 제시문 (ㄷ)의 정의에 따라 만들어진 영역 $C(D_f \cap P_0)$의 면적이 무엇이 되는지 논술하시오.

[3. 수학 문항 (다)] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) $f(x)=ax^2+bx+c$ (단, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$)라고 하면, a의 부호에 따라 $y=f(x)$의 그래프는 아래의 그림과 같은 형태를 갖는다. 이 그래프에서 유추할 수 있듯이, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 개의 실수해를 갖기 위한 필요충분조건은 $af\left(-\frac{b}{2a}\right)<0$이다. 그런데, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2}{4a}+c$이므로, 이 조건은 $b^2-4ac>0$이 된다.

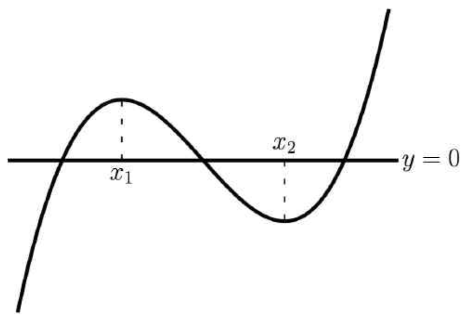


$a>0$

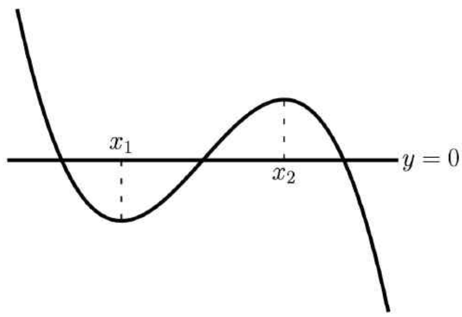


$a<0$

(ㄴ) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (단, $a, b, c, d \in R$, $a \neq 0$)라고 하면, a의 부호에 따라 $y=f(x)$의 그래프는 아래의 그림과 같은 형태를 갖는다. 이 그래프에서 유추할 수 있듯이, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 개의 실수해를 갖기 위한 필요충분조건은 "방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실수해 x_1, x_2를 갖고, $f(x_1)f(x_2)<0$"이다.



$a>0$



$a<0$

(ㄷ) 집합 A와 B를 다음과 같이 정의한다.

$A=\{(\alpha,\beta)\in R^2 \mid$ 이차방정식 $x^2+\alpha x+\beta=0$이 실수해를 갖지 않는다. $\}$
$B=\{(\alpha,\beta)\in R^2 \mid$ 삼차방정식 $x^3-3\alpha x+2\beta=0$이 서로 다른 세 실수해를 갖는다. $\}$

논제 1. (20점) 방정식 $x^3+ax+b=0$이 서로 다른 세 개의 실수해를 갖기 위한 필요충분조건이 $27b^2+4a^3<0$임을 제시문 (ㄴ)을 바탕으로 논술하시오. (단, $a, b \in R$)

논제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 두 집합의 교집합 $A \cap B$이 나타내는 영역의 면적을 구하고, 그 근거를 논술하시오.