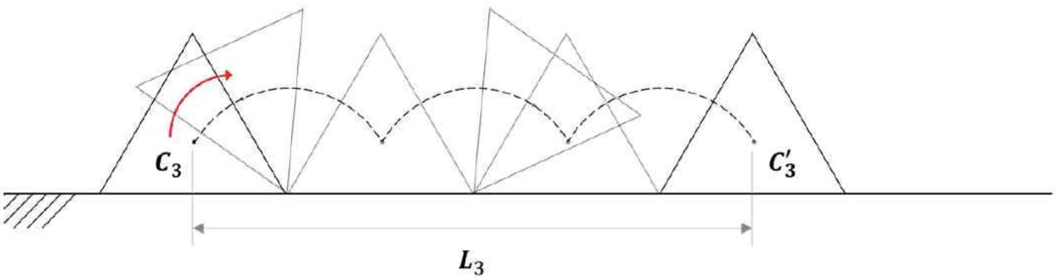
기출문제 1 2018 홍익대 문제1

홍익이는 자전거를 타고 가던 중 자전거 바퀴의 모양이 왜 원형이어야 하는지 궁금해졌다. 이에 홍익이는 반지름이 1인 원에 내접하는 정n각형 $(n \geq 3)$에 대해서, 1회전 당 가장 멀리 굴러 갈 수 있는 바퀴의 형태를 찾아보기로 하였다. (단, 모든 형태의 바퀴는 지면에서 미끄러지지 않는다.)

정n각형 바퀴의 중심을 C_n, 1회전 후 바퀴의 중심을 C_n', 그리고 두 중심 사이의 거리를 L_n이라 하자. <그림 1>은 정삼각형 바퀴가 1회전하는 과정을 간략하게 보여준다. 바퀴가 1회전하는 동안 중심은 C_3에서 C_3' 으로 이동한다. 이때, C_3과 C_3' 사이의 거리는 L_3이다.



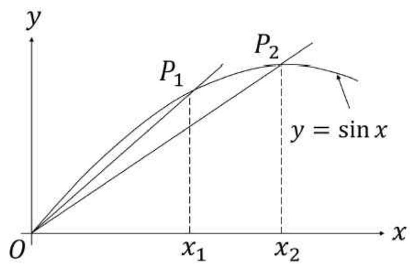
<그림 1>

(1) L_3의 값을 구하여라.

(2) L_n을 구하여라.

(3) $n \geq 3$일 때, $L_{n+1} > L_n$이 성립함을 보이고, $\lim_{n\to\infty} L_n$을 구하여라.

(참고) <그림 2>에서 직선 OP_1의 기울기는 직선 OP_2의 기울기보다 크다.



<그림 2>

(4) <그림 1>에서 점선은 정삼각형 바퀴가 1회전하는 동안 바퀴의 중심이 그리는 자취를 보여준다. 이 자취의 길이를 구하여라. 또한 정n각형 바퀴가 1회전할 때 중심이 그리는 자취의 길이를 구하여라.

기출문제 2

2018 홍익대 문제2

주어진 자료의 변량 x의 범위를 일정한 간격으로 나누었을 때, 각 구간을 '계급'이라 한다. 각 계급에 속하는 자료의 수를 그 계급의 '도수'라 하고, 도수의 총합에 대한 각 계급의 도수의 비를 그 계급의 '상대도수'라 한다. (각 계급의 상대도수)/(계급의 크기)를 나타낸 히스토그램을 생각하자. 계급의 크기가 충분히 작고 도수의 총합이 충분히 클 때, 대부분의 경우 이 히스토그램은 어떤 연속함수 $f(x)$의 그래프처럼 보인다. 주어진 구간 $a \le x \le b$ 에서 이 그래프 아래쪽의 넓이는 변량이 이 구간에 속하는 자료의 상대도수와 대략 같다.

(1) 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 C가 있다. 원 C의 내부에 균등하게 분포되어 있는 N개의 점에 대하여, 이들 점의 x좌표의 상대도수분포를 생각하여 제시문에서와 같은 함수 $f(x)$를 구하여 보자. 아래 식의 비는 $N \to \infty$일 때 수렴하며 이 극한값을 $F(b)$라 하자. (단, $-1 \le b \le 1$ 이다.)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N\text{개의 점 중 } x\text{좌표가 } -1\text{과 } b\text{사이에 있는 점의 개수}}{N} = F(b)$$

임의의 $-1 \le b \le 1$ 에 대해 아래의 식이 성립하는 함수 $f(x)$를 구하여라.

$$F(b) = \int_{-1}^{b} f(x)dx$$

(2) 다음의 각 경우 문항 (1)에서와 같이 함수 F와 f를 고려하여 함수 $f(x)$를 구하여라.

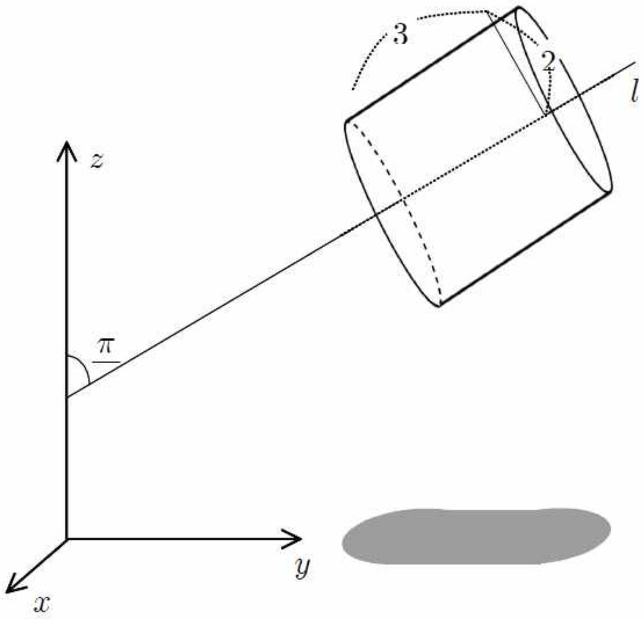
(2-1) 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 C가 있다. 원 C 위에 균등하게 분포되어 있는 N개의 점들의 x좌표

(2-2) 좌표공간 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 구면 S가 있다. 구면 S 위에 균등하게 분포되어 있는 N개의 점들의 x좌표

(참고) 지구에서 적도와 북위 α 위도선 사이의 영역의 넓이를 $G(\alpha)$라 하자. $G(\alpha)$는 $\sin\alpha$에 정비례한다. (단, 지구는 구형이라고 가정하자.)

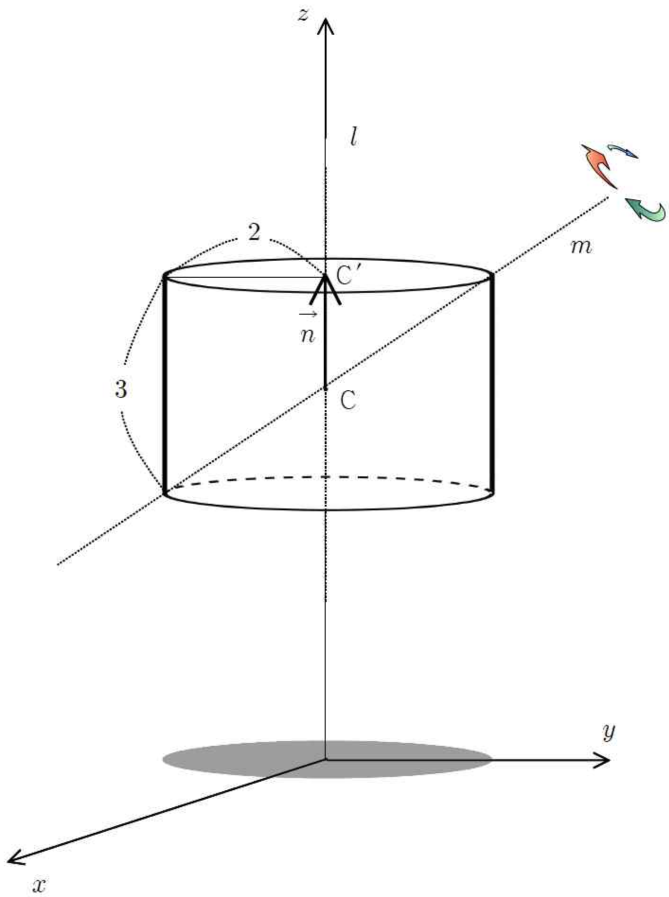
기출문제 3 2018 홍익대 문제1

(1) <그림 1>과 같이 좌표공간에 밑면의 반지름이 2, 높이가 3인 원기둥의 중심축 l이 z축의 양의 방향과 $\frac{\pi}{3}$의 각도를 이루고 있다. 이 원기둥의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



<그림 1>

문항 (2), (3)은 <그림 2>에 대한 질문이다. <그림 2>와 같이 밑면의 반지름이 2, 높이가 3인 원기둥이 밑면은 평면 $z=6$, 윗면은 평면 $z=9$ 위에 있고, 중심축 l이 z축이 되도록 좌표공간에 놓여 있다. 또 이 원기둥의 중심 C를 시점으로 하고 윗면의 중심 C′을 종점으로 하는 벡터 $\vec{n}$이 있다. 이 원기둥과 벡터 $\vec{n}$을 원기둥의 중심과 모서리를 지나는 직선 $m: x=0,\ 4z=3y+30$ 을 회전축으로 한 바퀴 돌릴 때 다음 물음에 답하여라.



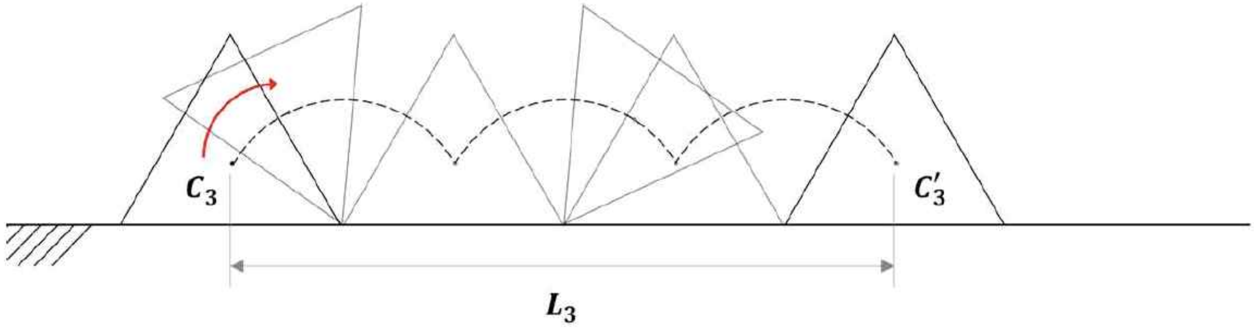
<그림 2>

(2) 직선 m을 회전축으로 회전하는 벡터 $\vec{n}$과 z축의 양의 방향이 이루는 각을 θ라 하자. $\cos\theta$의 최솟값을 구하여라.

(3) 직선 m을 회전축으로 회전하는 원기둥의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구하여라.

기출문제해설 1 2018 홍익대 문제1

(1)



<그림 1>

<그림 1>에 보인 바와 같이, 정삼각형 바퀴가 1회전 하는 동안 바퀴중심은 정삼각형 바퀴의 둘레 길이만큼 이동한다. 이때, 정삼각형 바퀴 한 변의 길이를 d_3이라 하면, d_3는 양변의 길이가 1이고 사잇각이 $\frac{2\pi}{3}$인 이등변삼각형의 밑변의 길이와 같다. 따라서

$$d_3 = 2\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\times\frac{1}{2}\right) = 2\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore L_3 = 3\times d_3 = 2\times 3\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

(2) 위 문제와 유사하게, 정n각형 바퀴가 1회전 하는 동안 바퀴중심은 정n각형 바퀴의 둘레 길이만큼 이동한다. 이때, 정삼각형 바퀴 한 변의 길이를 d_n이라 하면, 위 (1)에서와 같이 d_n는 양변의 길이가 1이고 사잇각이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형의 밑변의 길이와 같다. 따라서

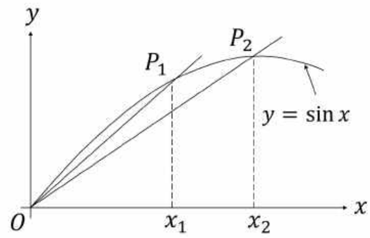
$$d_n = 2\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times\frac{1}{2}\right) = 2\times\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\therefore\ L_n = n\times d_n = 2n\times\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

(3)

각 자연수 $n \geq 3$에 대해 $a_n = \frac{\pi}{n}$이라 하면 위 (2)에서 구한 L_n는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L_n = 2n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \times \frac{\sin(a_n)}{a_n}$$



<그림 2>

<그림 2>에서 직선 OP_1의 기울기는 직선 OP_2의 기울기보다 크다. 즉, $0 < x_1 < x_2 < \pi$일 때, 다음 조건을 만족한다.

$$\frac{\sin(x_1)}{x_1} > \frac{\sin(x_2)}{x_2}$$

모든 자연수 $n \geq 3$에 대하여 $0 < a_{n+1} < a_n \leq \frac{\pi}{3}$ 이므로 위의 사실로부터 다음이 성립한다.

$$\frac{\sin(a_{n+1})}{a_{n+1}} > \frac{\sin(a_n)}{a_n}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi \times \frac{\sin(a_{n+1})}{a_{n+1}} > 2\pi \times \frac{\sin(a_n)}{a_n}$$

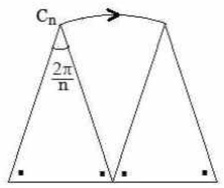
$$\therefore L_{n+1} > L_n$$

수열 $\{L_n\}$의 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi \times \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \quad \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

(4) 정삼각형 바퀴가 $\frac{1}{3}$ 회전 하는 동안 중심 C_3는 반지름 1이며 중심각이 $\frac{2\pi}{3}$인 부채꼴의 호를 그린다. 따라서 바퀴중심 C_3가 그리는 자취의 길이 l_3은 다음과 같다.

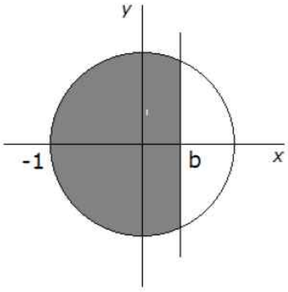
$$l_3 = 1 \times \frac{2\pi}{3} \times 3 = 2\pi \ (\because \text{호의 길이 } l = r\theta)$$



위 그림은 정n각형 바퀴가 $\frac{1}{n}$회전할 때, 표면에 닿는 변만을 나타낸 그림이다. 이때, 중심 C_n는 반지름 1이며 중심각이 $\frac{2\pi}{n}$인 부채꼴의 호를 그린다. 따라서 바퀴중심 C_n이 그리는 자취의 길이 l_n은 다음과 같다.

$$l_n = 1 \times \frac{2\pi}{n} \times n = 2\pi$$

(1) 많은 수의 점이 원 내부에 균등하게 분포되어 있다면, 원 내부의 어느 영역에든 대략 그 영역의 면적에 비례하는 개수의 점이 분포한다. 특히 전체 점 중 x좌표가 -1과 b사이에 있는 점, 즉 아래 그림에서 어두운 영역에 있는 점의 비는 대략 원의 면적에 대한 어두운 영역의 면적의 비가 된다.



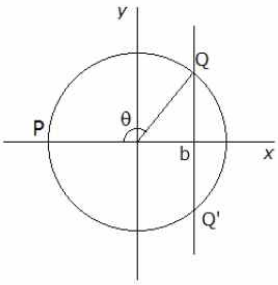
따라서 $F(b)=$(어두운 영역의 면적)$/\pi$ 이다. 위 아래 반원은 각각 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$의 그래프이므로

$$F(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

이고 $f(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ 이다.

(2)

(2-1)

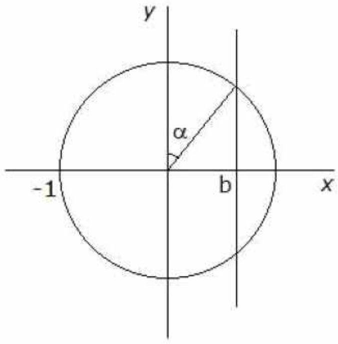


원 C위에 많은 수의 점이 균등하게 분포되어 있다면 주어진 원호 위에는 대략 원호의 길이에 비례하는 개수의 점이 분포한다. 특히 전체 점 중 x좌표가 -1과 b사이에 있는 점, 즉 원호 QPQ'위에 있는 점의 비는 대략 (원호 QPQ'의 길이)$/2\pi$ 이다. 따라서 $F(b)=$(원호 PQ의 길이)$/\pi$ 이다. 원호 PQ는 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\le x\le b)$의 그래프이므로 곡선의 길이의 공식에 의해

$$F(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ 이다.

(2-2)



구면 S에서 x좌표가 a와 b사이인 영역의 넓이를 $A(a,b)$라 하자. (참고)에 따르면 구면 S에서 x좌표가 0와 b사이인 영역의 넓이 $A(0,b)$는 $\sin\alpha = b$에 비례한다. (단, $0 \le b \le 1$) 즉, 적당한 비례상수 k에 대해 $A(0,b) = kb$이 성립한다. 구면 S의 겉넓이는 4π이므로 $A(0,1) = k = 2\pi$ 즉, $A(0,b) = 2\pi b$ 이다.

$0 \le b \le 1$ 일 때,

$$A(-1,b) = A(-1,0) + A(0,b) = 2\pi + 2\pi b$$

이고, 또한 이 때

$$A(-1,-b) = A(-1,0) - A(0,b) = 2\pi - 2\pi b$$

임은 명백하므로 모든 $-1 \le b \le 1$에 대해

$$A(-1,b) = 2\pi + 2\pi b$$

이다. 많은 수의 점이 구면 위에 균등하게 분포되어 있다면, 전체 점 중 x좌표가 -1과 b사이에 있는 점의 비는 대략 구면 S의 전체 겉넓이에 대한 이 영역 즉, 구면에서 x좌표가 -1과 b사이인 영역의 넓이의 비가 된다. 따라서 모든 $-1 \le b \le 1$에 대해

$$F(b) = \frac{A(-1,b)}{4\pi} = \frac{1+b}{2}$$

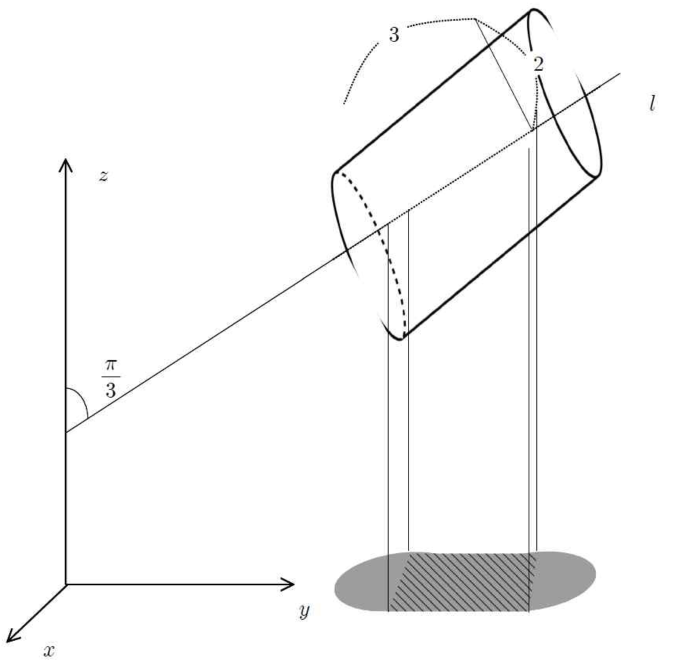
이다. 식 $F(b) = \int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ 로부터 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다. 따라서 $f(x) = \frac{1}{2}$ 이다.

※ 위에서 $A(0,b) = kb$의 비례상수 k는 $F(b)$를 구할 때 상쇄되므로 $k = 2\pi$ 값을 구할 필요는 없다.

기출문제해설 3

2018 홍익대 문제3

(1)



정사영한 도형은 위 그림과 같이 양 가장자리의 두 개의 반 타원과 중앙의 빗금친 부분으로 이루어져 있다.
이는 각각 다음의 평면도형들의 xy 평면 위로의 정사영이다.

- 원기둥의 윗면(원)의 xy 평면과 평행한 지름에 대한 반원
- 원기둥의 아랫면(원)의 xy 평면과 평행한 지름에 대한 반원
- 위 두 반원의 지름을 변으로 가지는 직사각형

두 평면의 사이 각은 두 평면의 법선벡터의 사이 각과 같으므로 이들 평면도형이 xy 평면과 이루는 각도는 각각 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ 이다.

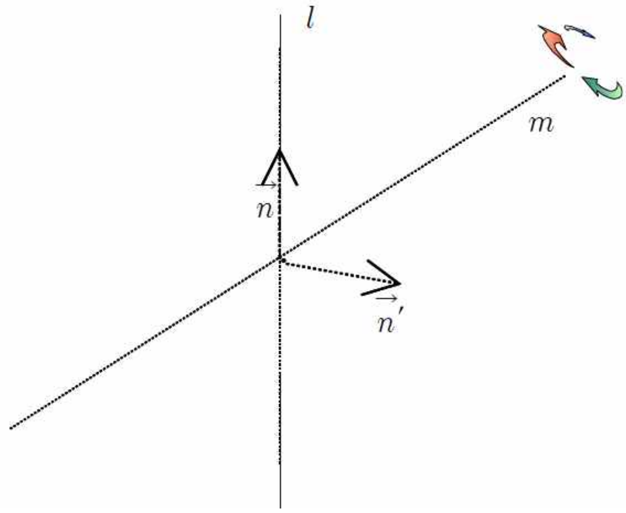
정사영 넓이공식을 이용하면 가장자리 두 반타원의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2\times\cos\frac{\pi}{3}=\pi$ 이고,

중앙의 빗금친 부분의 넓이는 $4\times 3\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=6\sqrt{3}$ 이다.

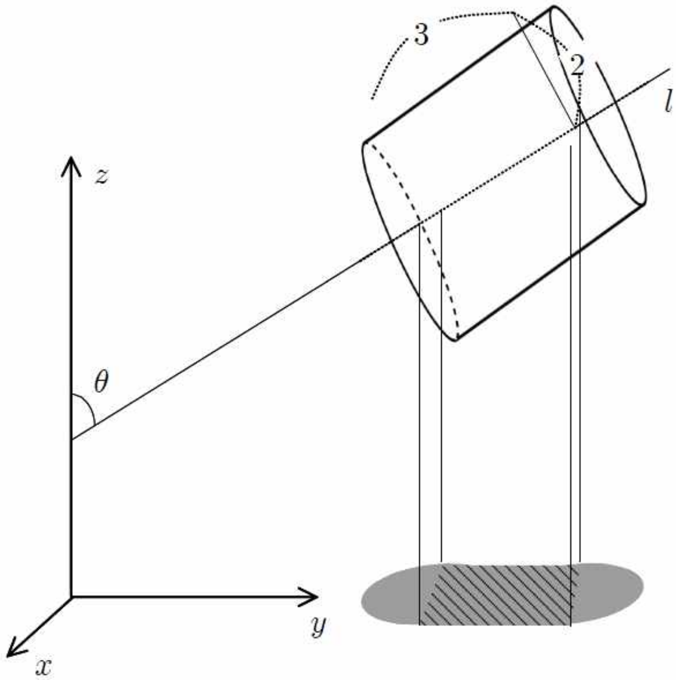
따라서 원기둥의 정사영의 넓이는 $6\sqrt{3}+2\pi$ 이다.

(2) 직선 m을 회전축으로 π만큼 돌렸을 때 θ값이 최대가 된다. 이때의 $\vec{n}$ 을 $\vec{n}'$ 라하자. 아래 그림에서 벡터 z축의 양의 방향과 직선 m과의 각도를 ϕ라 하면 z축의 양의 방향과 벡터 $\vec{n}'$과의 각도는 2ϕ 이고, 이 값이 θ의 최댓값 α가 된다. 한편 조건에서 $\cos\phi = \dfrac{3}{5}$ 이다. 따라서

$\cos\alpha = \cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1 = -\dfrac{7}{25}$ 이 $\cos\theta$의 최솟값이다.



(3)



정사영한 도형은 위 그림과 같이 중앙의 빗금친 부분과 양 가장자리의 두 개의 반 타원으로 이루어져 있다. 문항 (1)에서와 같이 생각하여 정사영 넓이공식을 이용하면 중앙의 빗금친 부분의 넓이는 $4 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 12\sin\theta$ 이고, 가장자리 반타원의 넓이는 각각 $\frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 \times |\cos\theta| = 2\pi|\cos\theta|$ 이다. 따라서 정사영한 도형의 넓이는

$$12\sin\theta + 4\pi|\cos\theta| \quad \text{..............}(*)$$

이다. 구간 $0 \le \theta \le \alpha$ (α는 문항 (2)에서 구한 θ의 최댓값)에서 함수 $f(\theta) = 12\sin\theta + 4\pi|\cos\theta|$의 최댓값이 문제에서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값이다. 문항 (2)에서 $\cos\alpha < 0$ 이므로 $\alpha > \frac{\pi}{2}$이다.

구간 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 $f(\theta) = 12\sin\theta + 4\pi\cos\theta$의 최댓값은 아래와 같이 삼각함수의 덧셈정리 또는 벡터의 내적을 이용하면 $\sqrt{12^2 + (4\pi)^2} = 4\sqrt{9+\pi^2}$ 이고,
구간 $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \alpha$ 에서 $f(\theta) = 12\sin\theta - 4\pi\cos\theta$의 최댓값은 $\sqrt{12^2 + (-4\pi)^2} = 4\sqrt{9+\pi^2}$ 이하이므로 정사영한 도형의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{9+\pi^2}$ 이다.

※ $g(\theta) = a\sin\theta + b\cos\theta$ 라 하자. (a, b는 상수) 사인함수의 덧셈정리를 이용하면

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta + \phi_0)$$

(단, ϕ_0는 $\cos\phi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\phi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 인 상수)를 얻는다.

$a, b > 0$일 경우, $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$이고, $g(\theta)$는 $0 < \theta = \frac{\pi}{2} - \phi_0 < \frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다. 한편, $a > 0 > b$일 경우 $-\frac{\pi}{2} < \phi_0 < 0$ 이고, $g(\theta)$는 $\frac{\pi}{2} < \theta = \frac{\pi}{2} - \phi_0 < \pi$에서 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다.

(별해) 함수 $g(\theta) = a\sin\theta + b\cos\theta$ (a, b는 상수)의 최댓값은 다음과 같이 벡터의 내적을 이용하여 구할 수도 있다.
$\vec{v} = (b, a)$, $\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 라 하자.

$$b\cos\theta + a\sin\theta = \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\phi \le |\vec{v}||\vec{w}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

(단, ϕ는 두 벡터의 사이 각)이고 $\phi = 0$ 즉, 두 벡터가 같은 방향일 때 부등식에서 등호가 성립한다.

따라서 모든 θ에 대해 $g(\theta) \le \sqrt{a^2+b^2}$ 이다. $a, b > 0$일 경우, $\vec{v}$는 1사분면의 점이고, 구간 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 $\vec{w}$는 단위원에서 1사분면에 속하는 모든 점을 나타내므로 구간 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 $g(\theta) = a\sin\theta + b\cos\theta$는 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다. 마찬가지로 $a > 0 > b$일 경우 $\vec{v}$는 2사분면의 점이므로 구간 $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$에서 함수 $g(\theta)$는 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다.