

## [2018 모의고사문제]

[문제 1] (100점)

좌표평면에서 점  $A(-2, 0)$ 을 지나는 직선이 원  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 제1사분면의 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점 중에서 점  $A$ 에 가까운 점을  $P$ 라 하자.  $\angle PAO = \theta$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AP} - 2}{\theta^2}$ 의 값을 구하여라. (단,  $O$ 는 원점이다.)

## [문제 2] (100점)

한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD를 밑면으로 하고 높이가 3인 사각뿔  $V-ABCD$ 에서 밑면의 중심을 O라 하고, 삼각형 VAB, VBC의 무게중심을 각각 P, Q라 하자. 꼭짓점 V의 밑면 위로의 정사영이 선분 AC에 있다고 할 때,  $\cos(\angle POQ)$ 의 최솟값을 구하여라.

**[문제 3] (100점)**

흰 공과 빨간 공이 각각 개씩 들어 있는 주머니가 있다. 세 명의 학생 A, B, C가 A, B, C 순서로 주머니에서 개의 공을 임의로 꺼내고, 공을 꺼낼 때마다 바로 공 개를 다시 채워 넣는다. 이때 A, B, C가 채워 넣는 공이 빨간색일 확률은 이고, 흰색일 확률은 이다.

- (a) B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 흰 공과 빨간 공이 각각 1개일 확률을 구하여라. (50점)  
(b) C가 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 구하여라. (50점)

[문제 4] (총 100점)

자연수  $n$ 과 세 함수

$$f(x) = x 2^x, \quad g(x) = x - [x], \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여, 합성함수  $y = g \circ f(x)$ 의 그래프와 함수  $y = h(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수를  $a_n$ 이라 하자. (단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

(a) 필요하면  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x 2^x = 0$ 을 이용해서, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려라. (40점)

(b)  $\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+2}}$ 을 구하여라. (60점)



2018학년도 서울시립대학교 자연계열 모의 논술고사 해설

서울시립대학교  
UNIVERSITY OF SEOUL

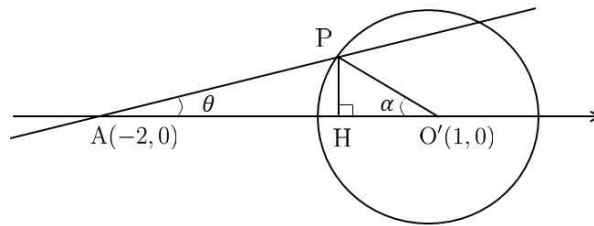
[문제 1] (100점)

좌표평면에서 점  $A(-2, 0)$ 을 지나는 직선이 원  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 제1사분면의 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점 중에서 점  $A$ 에 가까운 점을  $P$ 라 하자.  $\angle PAO = \theta$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AP} - 2}{\theta^2}$ 의 값을 구하여라. (단,  $O$ 는 원점이다.)

[예시답안]

그림과 같이 점  $P$ 에서  $x$ 축에  
 $\angle PO'H = \alpha$ 라 하자. (단,

내린 수선의 발을  $H$ 라 하고,  
 $O'(1, 0)$ 이다.)



이제  $\overline{AP} = x$ 라 하자. 그러면 두 직각삼각형  $PAH$ 와  $PHO'$ 으로부터  $\overline{PH} = x \sin \theta = \sin \alpha$ 이고  
 $\overline{AO'} = x \cos \theta + \cos \alpha$ 인데,  $\overline{AO'} = 3$ 이므로

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = (3 - x \cos \theta)^2 + (x \sin \theta)^2$$

이다. 그리고 이차방정식  $x^2 - 6 \cos \theta x + 8 = 0$ 을 풀면

$$x = 3 \cos \theta \pm \sqrt{9 \cos^2 \theta - 8}$$

이다. 그런데 직선은 원과 두 점에서 만나야 하므로  $\theta$ 의 값은 직선이 원에 접할 때의 각 보다 작아야 한다. 원의  
반지름이 1이고  $\overline{AO'} = 3$ 이므로

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} < \cos \theta < 1$$

이다. 따라서  $9 \cos^2 \theta - 8 > 0$ 이고,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} x = 2$ 이므로  $x = 3 \cos \theta - \sqrt{9 \cos^2 \theta - 8}$ 이다. 그러므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(3 \cos \theta - 2) - \sqrt{9 \cos^2 \theta - 8}}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{12(1 - \cos \theta)}{\theta^2((3 \cos \theta - 2) + \sqrt{9 \cos^2 \theta - 8})}$$

이고,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{12}{((3 \cos \theta - 2) + \sqrt{9 \cos^2 \theta - 8})} = 6$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{\theta^2} = 3$$

이다.

[문제 2] (100점)

한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD를 밑면으로 하고 높이가 3인 사각뿔  $V-ABCD$ 에서 밑면의 중심을 O라 하고, 삼각형 VAB, VBC의 무게중심을 각각 P, Q라 하자. 꼭짓점 V의 밑면 위로의 정사영이 선분 AC에 있다고 할 때,  $\cos(\angle POQ)$ 의 최솟값을 구하여라.

[예시답안]

$A(-3, -3, 0)$ ,  $B(3, -3, 0)$ ,  $C(3, 3, 0)$ ,  $D(-3, 3, 0)$ 이고, 꼭짓점 V의  $z$ 좌표가 3이 되도록 좌표축을 정하자. 그러면  $O(0, 0, 0)$ 이고, 두 점 A, C를 지나는 직선의 방정식은  $y = x$ ,  $z = 0$ 이므로  $V(3x, 3x, 3)$  ( $|x| \leq 1$ )로 나타낼 수 있다. 한편,  $P(x, x-2, 1)$ ,  $Q(x+2, x, 1)$ 이므로  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2x^2 + 1$ 이다. 그리고  $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2x^2 - 4x + 5}$ ,  $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{2x^2 + 4x + 5}$ 이므로 내적의 정의에 의해

$$\cos(\angle POQ) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 5} \sqrt{2x^2 + 4x + 5}}$$

이고,  $\cos(\angle POQ) > 0$  이다.

이제  $t = 4x^4 + 4x^2 + 25$ 라 하면  $|x| \leq 1$ 이므로  $25 \leq t \leq 33$ 이고

$$\left( \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 5} \sqrt{2x^2 + 4x + 5}} \right)^2 = \frac{4x^4 + 4x^2 + 1}{4x^4 + 4x^2 + 25} = 1 - \frac{24}{t}$$

이다. 따라서  $\left( \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 5} \sqrt{2x^2 + 4x + 5}} \right)^2$ 의 최솟값이  $\frac{1}{25}$ 이므로  $\cos(\angle POQ)$ 의 최솟값은  $\frac{1}{5}$ 이다.

[문제 3] (100점)

흰 공과 빨간 공이 각각 1개씩 들어 있는 주머니가 있다. 세 명의 학생 A, B, C가 A, B, C 순서로 주머니에서 1개의 공을 임의로 꺼내고, 공을 꺼낼 때마다 바로 공 1개를 다시 채워 넣는다. 이때 A, B, C가 채워 넣는 공이 빨간색일 확률은  $p$ 이고, 흰색일 확률은  $1-p$ 이다.

(a) B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 흰 공과 빨간 공이 각각 1개일 확률을 구하여라. (50점)

(b) C가 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 구하여라. (50점)

[예시답안]

(a) A가 공을 채워 넣은 후 주머니에 빨간 공이 2개일 확률은, 흰 공을 꺼내고 빨간 공을 넣어야 하므로  $\frac{p}{2}$ 이고,

흰 공과 빨간 공이 각각 1개일 확률은, 빨간 공을 꺼내고 빨간 공을 넣거나 흰 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로  $\frac{p}{2} + \frac{1-p}{2} = \frac{1}{2}$ 이며, 흰 공이 2개일 확률은 빨간 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로  $\frac{1-p}{2}$ 이다.

B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 흰 공과 빨간 공이 각각 1개인 경우는, A가 공을 채워 넣은 후 주머니에 있는 흰 공의 개수  $n$ 에 따라 다음의 3가지 경우가 있다.

(i)  $n=0$ 인 경우: 흰 공을 넣어야 하므로 확률은  $\frac{p}{2} \cdot (1-p)$ 이다.

(ii)  $n=1$ 일 경우: 빨간 공을 꺼내고 빨간 공을 넣거나, 흰 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로 확률은  $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (1-p) \right\} = \frac{1}{4}$ 이다.

(iii)  $n=2$ 일 경우: 빨간 공을 넣어야 하므로 확률은  $\frac{1-p}{2} \cdot p$ 이다.

따라서 구하는 값은  $\frac{1}{4} + p(1-p)$ 이다.

(b) 같은 방법으로 B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 빨간 공이 2개일 확률은  $\frac{p}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p = \frac{p}{4} + \frac{p^2}{2}$ 이다.

따라서 구하는 값은  $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{4} + p(1-p) \right\} + \frac{p}{4} + \frac{p^2}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3p}{4}$ 이다.

[문제 4] (100점)

자연수  $n$ 과 세 함수

$$f(x) = x 2^x, \quad g(x) = x - [x], \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여, 합성함수  $y = g \circ f(x)$ 의 그래프와 함수  $y = h(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수를  $a_n$ 이라 하자. (단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

(a) 필요하면  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x 2^x = 0$ 을 이용해서, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려라. (40점)

(b)  $\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+2}}$ 을 구하여라. (60점)

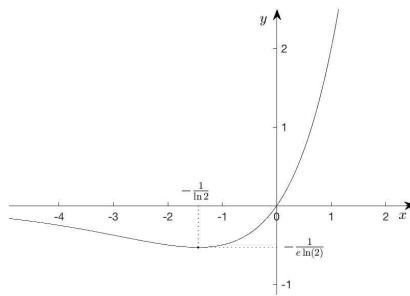
[예시답안]

(a)  $f'(x) = 2^x (1 + x \ln 2)$ 이고  $f''(x) = 2^x (2 + x \ln 2) \ln 2$ 이다. 따라서  $x = -\frac{1}{\ln 2}$ 일 때  $f'(x) = 0$ 이고

$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2} 2^{-\frac{1}{\ln 2}} = -\frac{1}{2^{\log_2 e} \ln 2} = -\frac{1}{e \ln 2}$  이므로, 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$-\frac{2}{\ln 2}$	...	$-\frac{1}{\ln 2}$	...	0	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	1	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{e^2 \ln 2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e \ln 2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

그런데  $2 < e < 4$ 이므로  $1 < \log_2 e = \frac{1}{\ln 2} < 2$ 이고  $0 < \frac{1}{e \ln 2} < 1$ 이다. 또한  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이고  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.

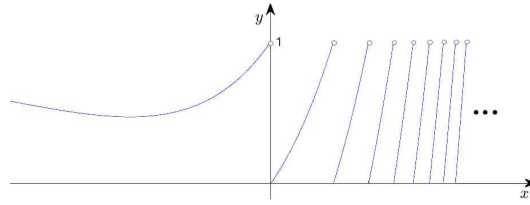


(b) 고정된 정수  $k$ 에 대해서 어떤 구간에 포함되는 모든  $x$ 가  $k \leq f(x) < k+1$ 을 만족시키면

$$g \circ f(x) = f(x) - [f(x)] = f(x) - k$$

이므로, 주어진 그 구간에서  $y = g \circ f(x)$ 의 그래프는  $y = f(x)$ 의 그래프를  $y$ 축으로  $-k$ 만큼 평행이동한 그래프와 같다. 따라서 함수  $y = g \circ f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.





(i)  $x < 0$ 일 때,  $g \circ f(x) = f(x) + 1$ 이므로  $x < 0$ 에서  $y = g \circ f(x)$ 의 그래프와  $y = -x$ 의 그래프와의 교점의 개수는 1이다.

(ii)  $x \geq 0$ 일 때,  $f(0) = 0$ ,  $f(n) = n 2^n$ ,  $f'(0) = 1$ 이므로  $x \geq 0$ 에서  $y = g \circ f(x)$ 의 그래프와  $y = \frac{x}{n}$ 의 그래프와의 교점의 개수는  $f(n) - 1 = n 2^n - 1$  이다.

따라서  $a_n = n 2^n$  이므로

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+2}} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) = n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{3}{4} + n - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

이다.