기출문제 1

2017 홍익대 문제1

함수 f의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$가 성립하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 f를 주기함수라고 한다. 이때, 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.

1. $f(x)=\cos x$이면 $f(0)=1$이다. 이것을 이용하여 모든 정수 k에 대해 $f(k+n)=f(k)$가 성립하는 양의 정수 n은 존재하지 않음을 보이시오.

2. f는 주기가 p인 주기함수이다. 임의의 양의 정수 n에 대해 $f(x+np)=f(x)$임을 보이시오.

3. 주기가 각각 p_1, p_2인 두 주기함수 f_1, f_2가 있다. $\dfrac{p_1}{p_2}$이 유리수이면 $g(x)=f_1(x)+f_2(x)$로 정의된 함수 g도 주기함수임을 보이시오.

4. $f(x)=\cos(2\pi x)+\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}2\pi x\right)$인 함수 f는 주기함수가 아님을 보이시오.

기출문제 2

2017 홍익대 문제2

n개의 구멍에 n개의 두더지 로봇이 하나씩 들어 있는 게임기가 있다. 게임 시작 후 1초부터 매 초마다 두더지 로봇이 나타났다가 사라진다. 각 두더지 로봇이 나타날 확률이 p이고 나타나지 않을 확률은 $q=1-p$이다. 각각의 두더지 로봇이 나타나는 사건은 서로 독립이다.

1. 게임 시작 후 1초 시점에 두더지 로봇이 하나만 나타날 확률 r을 n, p, q를 이용한 식으로 나타내시오.

2. 주어진 n에 대해 문항 (1)의 확률 r이 최대가 되는 p를 n을 이용한 식으로 표시하고, 이 p에 대하여 n이 한없이 커질 때 r의 극한값을 구하시오.

3. $|a|<1$일 때, 다음 등비급수의 합

$$1+a+a^2+a^3+\cdots = \frac{1}{1-a}$$

을 유도하는 과정을 고려하여 아래 급수의 합에 관한 식이 성립함을 보이시오.

$$1+2a+3a^2+4a^3+\cdots = \frac{1}{(1-a)^2}$$

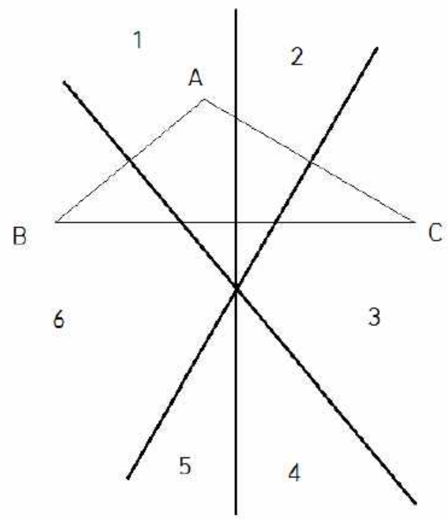
4. 게임을 시작 한 후 두더지가 한 마리라도 처음 나타난 시간을 확률변수 T라고 한다. T의 기댓값 $\mathrm{E}(T)$를 구하시오.

기출문제 3 2017 홍익대 문제3

평면 위의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $\overline{PQ}$로 표시한다. 평면 위에 주어진 두 점 Q_1, Q_2에 대해 $\overline{PQ_1} < \overline{PQ_2}$가 성립하는 점 P들의 집합을 $U(Q_1, Q_2)$로 표시하고, 주어진 세 점 Q_1, Q_2, Q_3에 대해 $\overline{PQ_1} < \overline{PQ_2} < \overline{PQ_3}$가 성립하는 점 P들의 집합을 $U(Q_1, Q_2, Q_3)$로 표시한다.

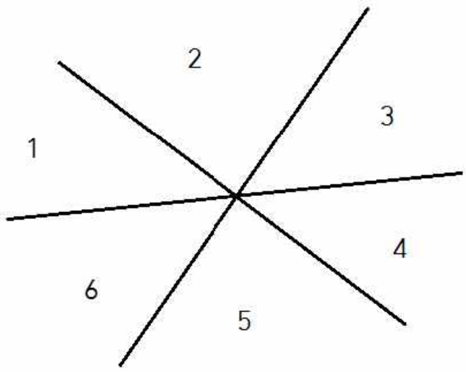
1. a가 양의 상수이고 좌표평면 위의 두 점 $A(a,0)$, $B(-a,0)$가 주어졌다. $U(A,B)$는 선분 AB의 수직이등분선을 기준으로 A쪽 영역임을 보이시오.

2. (그림 1)과 같이 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 주어졌을 때, 삼각형 ABC의 각 변의 수직이등분선에 의해 평면은 6개의 영역으로 나뉜다. 평면에서 삼각형의 각 변의 수직이등분선을 제외한 부분을 1번 영역 ~ 6번 영역이라고 표시하였다. 각 영역이 $U(A,B,C)$, $U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$ 중 어떤 것에 해당되는지 구하고 4번 영역의 답에 대해서는 그 이유를 설명하시오.



(그림 1)

문항 3, 4, 5는 (그림 2)에 대한 질문이다. (그림 2)는 평면 위에 주어진 세 점 A, B, C가 정하는 $U(A, B, C), \cdots, U(C, B, A)$를 나타낸 것이다. 세 점 A, B, C는 그림에 표시되어 있지 않다. A, B, C의 위치에 따라 1번 영역 ~ 6번 영역이 $U(A, B, C), \cdots, U(C, B, A)$ 중 각각 무엇에 해당되는지는 다를 수 있다.



(그림 2)

3. 2번 영역이 $U(C, B, A)$라면 3번 영역은 나머지 5개 $U(A, B, C), \cdots, U(C, A, B)$ 중 무엇이 될 수 있는지 가능한 경우를 모두 제시하고 설명하시오.

4. 1번 영역, 2번 영역이 각각 $U(B, A, C)$, $U(B, C, A)$이라면 4번 영역, 5번 영역은 각각 무엇인지 구하고 설명하시오.

5. 1번 영역 ~ 6번 영역에 $U(A, B, C), \cdots, U(C, B, A)$가 배치되는 가능한 모든 경우의 수를 구하시오.

기출문제해설 1 2017 홍익대 문제1

1-1. 모든 정수 k에 대해 $\cos(k+n)=\cos(k)$가 성립하는 양의 정수 n이 있다고 가정하자.

$k=0$일 때 $\cos(0+n)=\cos(0)$이고, $\cos(n)=\cos(0)=1$ 이므로 n은 2π의 정수배이다.

즉 $n=m2\pi$인 정수 m이 존재한다. $n\neq 0$ 이므로 $m\neq 0$ 이다.

따라서 $\pi=\dfrac{n}{2m}$인데, π는 무리수이고, 분수 $\dfrac{n}{2m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

[별해] 삼각함수의 덧셈공식 $\cos(k+n)=\cos k\cos n-\sin k\sin n$ 을 이용하면

$\cos k\cos n-\sin k\sin n=\cos k$ 이다. $\sin k=0$와 $\cos k=0$이 동시에 성립하지는 않으므로

$\cos k\neq 0$일 때 양변을 $\cos k$로 나누고 정리하면 $\cos n-1=\tan k\sin n$이다.

이것이 모든 정수 k에 대해 성립하는데 좌변은 k와 무관하므로 $\cos n-1=0$이고 $\sin n=0$ 이어야 한다.

그러므로 $n=m2\pi$인 정수 m이 존재한다. $n\neq 0$ 이므로 $m\neq 0$ 이다.

따라서 $\pi=\dfrac{n}{2m}$인데, π는 무리수이고, 분수 $\dfrac{n}{2m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

1-2. 수학적 귀납법을 이용하여 모든 양의 정수 n에 대해 $f(x+np)=f(x)$가 성립함을 보이자.

$n=1$일 때 p가 주기이므로 주기함수의 정의에 의해 $f(x+p)=f(x)$이다.

$n=k$일 때 성립한다고 가정하면 모든 x에 대해 $f(x+kp)=f(x)$이다. 따라서

$f(x+(k+1)p)=f((x+kp)+p)=f(x+kp)=f(x)$이다. 즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대해 $f(x+np)=f(x)$가 성립한다.

1-3. 가정에 의해 $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{n}{m}$인 정수 n, m이 있다.

함수의 주기 p_1, p_2는 양수이므로 $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{n}{m}$는 양수이고 따라서 n, m도 양수라 가정할 수 있다.

$\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{n}{m}$로부터 $mp_1=np_2$이다. 이 값을 p라 하면 p는 양수이다.

(2)의 결과로부터 $f_1(x+np_1)=f_1(x),\ f_2(x+mp_2)=f_2(x)$ 이므로, 모든 x에 대해

$g(x+p)=f_1(x+mp_1)+f_2(x+np_2)=f_1(x)+f_2(x)=g(x)$

이 성립하므로 g도 주기함수이다.

1-4. $f(x)=\cos(2\pi x)+\cos(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x)$ 가 주기가 p인 주기 함수라고 하면, $f(x)=f(x+p)$의 관계가 모든 실수 x에 대해 성립하여야 한다. 즉 $x=0$일 때 $f(0+p)=f(0)$인 관계가 성립해야 한다.

$f(0)=\cos(0)+\cos(0)=2$이므로 $f(p)=\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=2$이다.

$\cos(x)\le 1$이므로 $\cos(2\pi p)=1$이고 $\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=1$일 때만

$\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=2$가 성립한다. $\cos(2\pi p)=1$이므로 p는 정수이고,

$\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p)=1$이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}}p$도 정수이어야 한다. 주기 p가 양수이므로 적당한 양의 정수 $n,\ m$이 있어서 $p=n,\ \frac{1}{\sqrt{2}}p=m$이어야 한다. 즉, $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$이다. $\sqrt{2}$는 무리수이고, 분수 $\frac{n}{m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

기출문제해설 2

2017 홍익대 문제2

2-1. n개의 두더지 로봇 중 게임시작 후 1초에 특정한 하나(가령, 첫 번째 두더지 로봇)만 나타나고 나머지 $(n-1)$개는 나타나지 않을 확률은 $p(1-p)^{n-1}$이다. 첫 번째 두더지만 나타나는 사건, 두 번째 두더지만 나타나는 사건, ... 은 서로 배반사건이므로 n개 중 하나만 나타날 확률은 각 사건의 확률의 합 즉, $r = np(1-p)^{n-1} = npq^{n-1}$ 이다.
(참고) 특정한 시점에 나타나는 두더지 로봇의 수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 가지는 확률변수이다. 따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X=1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$ 이다.

2-2. 구간 $0 \le p \le 1$에서 함수 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$가 최대가 되는 p의 값과 이때 최댓값을 구하기 위해 구간 $0 < p < 1$에서 함수 f의 증감을 도함수를 이용하여 파악한다. 또는 구간 $0 < p < 1$에서 함수 f의 극값을 구하고 구간의 양끝에서의 함수값 $f(0), f(1)$과 비교하여 최댓값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(p) &= n(1-p)^{n-1} - n(n-1)p(1-p)^{n-2} \\ &= n(1-p)^{n-2}((1-p)-(n-1)p) \\ &= n(1-p)^{n-2}(1-np) \end{aligned}$$

이므로 $p = \frac{1}{n}$ 일 때 $f'(p) = 0$이다.

$0 < p < \frac{1}{n}$이면 $f'(p) > 0$ 이어서 f는 이 구간에서 증가하고, $\frac{1}{n} < p < 1$이면 $f'(p) < 0$ 이므로 f는 이 구간에서 감소한다. 따라서 그래프의 개형을 고려하면 함수 f는 구간 $0 \le p \le 1$에서

$p = \frac{1}{n}$일 때 최댓값 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ 을 취한다. $n \to \infty$일 때 이 값의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}$$

이다.

[별해] 구간 $0 < p < 1$에서 함수 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$의 극값은 $p = \frac{1}{n}$일 때 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ 이다. 이 극값은 구간의 양끝에서의 함숫값 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$보다 크므로 구간 $0 \le p \le 1$에서 함수의 최댓값이다.

2-3. $S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ 라고 하면 $aS = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots$ 이다.

$S - aS = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \dfrac{1}{(1-a)}$

즉, $(1-a)S = \dfrac{1}{(1-a)}$ 이다. 그러므로 $S = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

[별해] $A = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$ 라고 하면

$A + aA + a^2A + a^3A + \cdots =$

$(1 + a + a^2 + \cdots) + (a + a^2 + a^3 + \cdots) + (a^2 + a^3 + a^4 + \cdots) + \cdots = 1 + 2a + 3a^2 + \cdots$

즉, $S = A + aA + a^2A + a^3A + \cdots$ 이다.

그러므로 $S = A(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots) = A^2 = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

2-4. 특정 시점에 n개의 두더지 로봇 중 하나도 나타나지 않을 확률을 s 라고 하면 $s = (1-p)^n = q^n$ 이다. 특정 시점에 적어도 하나의 두더지가 나타날 확률은 여사건의 확률이므로 $1-s$ 이다. 게임 시작 후 k 초에 처음으로 두더지가 하나라도 나타날 확률 즉, $\mathrm{P}(T=k)$은 게임 시작 후 1초, 2초, ... , $k-1$초에는 하나도 나타나지 않고, k초에 적어도

하나가 나타날 확률이므로 $s^{k-1}(1-s)$이다.

확률변수 T의 기댓값은

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}(1-s) = (1-s)\sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1} \text{ 이다.}$$

(3)의 결과에 의해 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1} = \frac{1}{(1-s)^2}$ 이므로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{1-s} = \frac{1}{1-(1-p)^n} = \frac{1}{1-q^n} \text{ 이다.}$$

기출문제해설 3

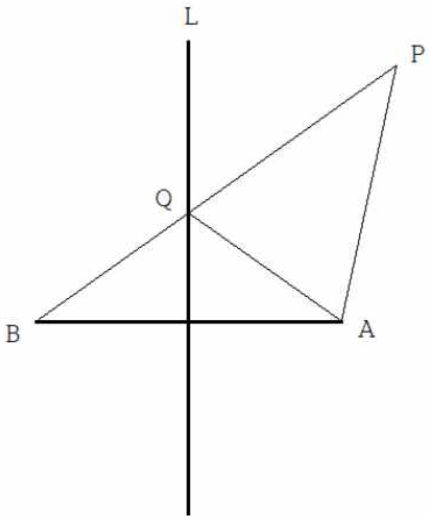
2017 홍익대 문제3

3-1. 주어진 두 점 A, B의 수직이등분선은 y축이다. 좌표평면 상의 점 $P=(x,y)$에 대해

$\overline{PA}<\overline{PB} \Leftrightarrow \overline{PA}^2<\overline{PB}^2 \Leftrightarrow (x-a)^2+y^2<(x+a)^2+y^2 \Leftrightarrow -4ax<0 \Leftrightarrow x>0$

즉, $U(A,B)=\{(x,y)\mid x>0\}$는 y축 오른쪽의 영역이다.

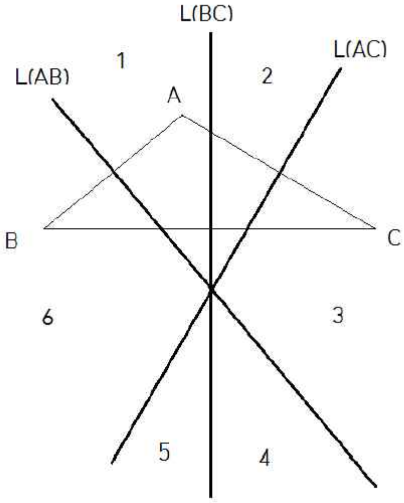
(별해)

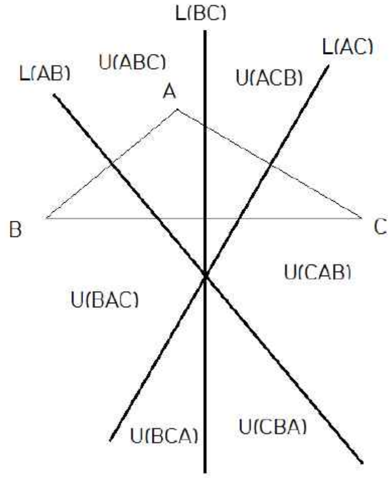


점 P가 선분 AB의 수직이등분선 L에 대해 A쪽에 있다하자. 선분 BP와 직선 L의 교점을 Q라 하면 $\overline{QB}=\overline{QA}$이다. 삼각형 PQA의 변의 길이에 대한 삼각부등식으로부터

$\overline{PA}<\overline{PQ}+\overline{QA}=\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{PB}$ 를 얻는다. 마찬가지로 점 P가 L에 대해 B쪽에 있다면 $\overline{PB}<\overline{PA}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $U(A,B)$는 L에 대해 A쪽 영역이다.

3-2.

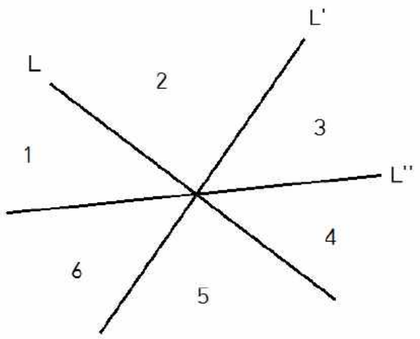




위 왼쪽 그림에서 $L(AB), L(BC), L(AC)$로 표시된 직선은 각각 선분 AB, 선분 BC, 선분 AC의 수직이등분선이다. 그림에서 4번 영역은 $L(AB)$의 B쪽, $L(BC)$의 C쪽이다. 따라서 1에 의해 4번 영역(내부)의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$이다. 즉, 4번 영역은 $U(C,B,A)$이다. 마찬가지로 나머지 영역은 위 오른쪽 그림과 같음을 알 수 있다.

※ 엄밀히 말하면 위의 설명은 4번 영역이 $U(C,B,A)$에 포함됨을 보인 것이다. 평면의 나머지 1 ~ 3, 5, 6번 부분은 각각 다른 영역에 포함되므로 $U(C,B,A)$는 4번 영역으로 한정됨을 알 수 있다.

3-3.



2번 영역이 $U(C,B,A)$라면 2번 영역의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$ 이다.

그림에서 세 직선 L, L', L''은 각각 선분 AB, BC, CA의 수직이등분선 중 하나이다. 2, 3번 영역이 선분 AB의 수직이등분선에 대해 같은 쪽에 있다면 두 영역의 점들에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 대소 관계는 변하지 않고, 2, 3번 영역이 선분 AB의 수직이등분선의 반대쪽에 있다면 두 영역의 점들에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 대소 관계는 반대가 된다. 선분 BC, CA의 수직이등분선들에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

2, 3번 영역은 직선 L'에 대해서는 서로 반대쪽에 있고 나머지 두 직선 L, L''에 대해서는 같은쪽에 있다. 따라서 2번과 인접한 3번 영역에서 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$의 세 쌍의 대소관계 중 1개는 반대가 되고, 2개는 변화가 없어야 한다. 즉 3번 영역은 아래 세 가지 경우 중 하나에 해당한다.

① $\overline{PA} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$

② $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PB} < \overline{PC}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$

③ $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PA} < \overline{PC}$

이 중 ③은 모순되는 식이고 ($\overline{PB} < \overline{PA} < \overline{PC} < \overline{PB}$이므로) ①, ②는 각각 $U(C,A,B)$, $U(B,C,A)$에 해당한다.

3-4. 1, 2번 영역이 각각 $U(B,A,C)$, $U(B,C,A)$이라 하자. 3에서와 같이 영역 $U(B,C,A)$에 인접한 3번 영역은 $U(B,A,C)$, $U(C,B,A)$중 하나이어야 하므로 3번 영역은 $U(C,B,A)$이다.

$U(C,B,A)$와 인접한 영역은 $U(B,C,A)$, $U(C,A,B)$중 하나이므로 4번 영역은 $U(C,A,B)$이고, 마찬가지로 $U(C,A,B)$와 인접한 영역은 $U(C,B,A)$, $U(A,C,B)$중 하나이므로 5번 영역은 $U(A,C,B)$이다.

(별해) 4번 영역은 세 직선 L, L', L'' 각각에 대해 1번 영역과 반대편에 있다. 따라서 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$의 세 쌍의 대소관계가 모두 반대가 되어야 한다. 즉, 4번 영역에서 $\overline{PA} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$ 이므로 4번 영역은 $U(C,A,B)$이다. 마찬가지로 5번 영역은 2번 영역의 "반대편"이므로 $U(A,C,B)$이다.

3-5. 1번 영역은 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$ 중 어느 것도 될 수 있다. 가령 1번 영역이 $U(A,B,C)$가 되는 평면상의 세 점 A,B,C가 주어졌을 때 두 점 A,B의 위치를 서로 교환하면 1번 영역은 $U(B,A,C)$가 된다. (아래 설명과 그림 참고) 즉, 1번 영역은 하나의 배열로부터 세 점 A,B,C의 위치를 서로 교환함으로써 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$중 어느 것도 될 수 있다.

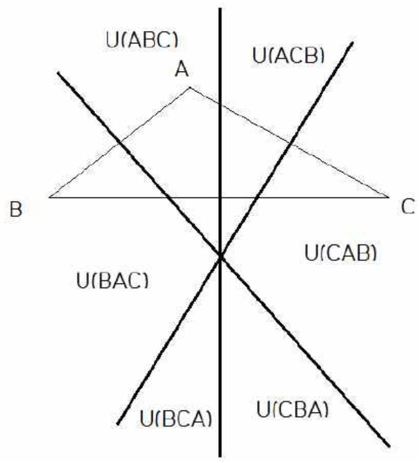
1번 영역이 $U(A,B,C)$가 되는 평면상의 세 점 A,B,C가 주어졌다면 3에서와 같이 2번 영역은 $U(A,C,B)$ 또는 $U(B,A,C)$이다. 1, 2번 영역이 정해지면 4에서와 같이 3 ~ 6번 영역이 모두 결정된다. 따라서 1번 영역이 $U(A,B,C)$인 배열은 최대 2개이다.

두 배열이 모두 가능함은 다음과 같이 설명할 수 있다. 1번 영역이 $U(A,B,C)$인 배열이 하나는 존재한다. 만약 이 배열에서 2번 영역이 $U(A,C,B)$이라면 세 점 A,B,C에서 A와 C의 위치를 교환하고 세 직선 L, L', L''의 교점 (즉, 삼각형 ABC의 외심)을 중심으로 180도 회전시키면 (즉, 이와 같이 얻은 위치의 세 점 A,B,C에 대해서)

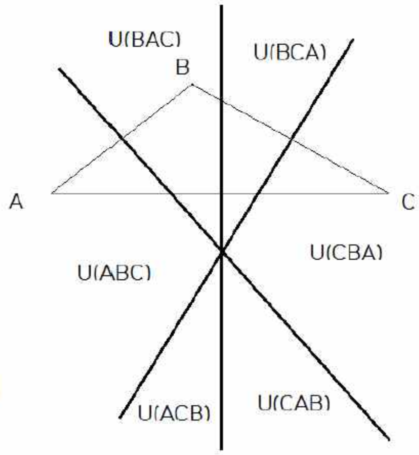
1, 2번 영역은 각각 $U(A,B,C)$, $U(B,A,C)$이다. (아래 설명과 그림 참고) 따라서 가능한 모든 배열의 개수는 $6 \times 2 = 12$ 이다.

※ 특정한 위치의 세 점 A, B, C에 의해 (즉, A, B, C까지 거리의 순서에 의해) (그림2)와 같이 평면이 나누어졌다하자. 세 점 A, B, C의 위치를 서로 교환하면 (또는 세 점의 이름을 바꾸면) 1 ~ 6번 영역이 각각 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$ 중 무엇에 해당하는 지가 바뀐다. (또는 1 ~ 6번 영역의 이름이 바뀐다.)

예를 들어 (그림 1)에서 A, B의 위치를 교환하면



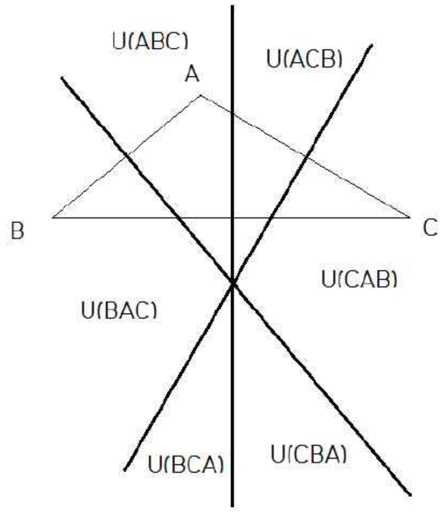
로부터



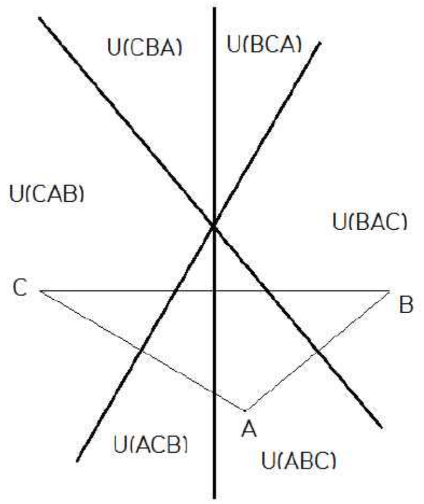
을 얻는다.

이와 같이 세 점 A, B, C의 위치를 교환하여 얻는 경우의 수는 $3! = 6$ 이다. 이제 각각의 경우 세 직선의 교점 (즉, 삼각형 ABC의 외심)을 중심으로 180도 회전하면 새로운 배열을 얻는다.

예를 들어 (그림 1)에서



로부터



를 얻는다.

따라서 1 ~ 6번 영역에 해당하는 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$의 $3! \times 2 = 12$개의 배열을 얻는다.