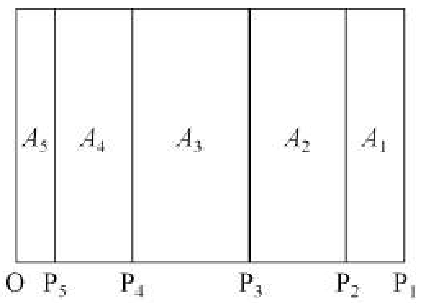
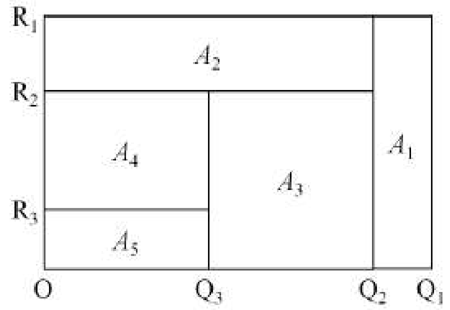
기출문제 1

2016 홍익대 문제1

직사각형을 주어진 넓이의 비를 가지는 작은 직사각형들로 분할하여 보자. 예를 들어, 비 $A_1 : A_2 : A_3 : A_4 : A_5$가 주어졌을 때, 다음과 같이 두 가지 방법으로 직사각형을 분할하였다. 즉, 아래 그림에서 작은 직사각형들의 넓이의 비는 주어진 비와 같다.



<그림 1>



<그림 2>

<그림 1>의 분할 방법은 세로 방향으로만 분할한 단순한 방법임에 반하여, <그림 2>의 분할 방법은 복합적인 방법이다. 특히 <그림 2>의 분할에서 연속한 세 직사각형들 중(즉, A_k, A_{k+1}, A_{k+2}로 표시된 직사각형들 중) 임의의 두 직사각형은 변의 일부를 공유한다.

(1) <그림 1>에서 선분의 비 $r_1 = \dfrac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}}$, $r_2 = \dfrac{\overline{OP_3}}{\overline{OP_2}}$, $r_3 = \dfrac{\overline{OP_4}}{\overline{OP_3}}$, $r_4 = \dfrac{\overline{OP_5}}{\overline{OP_4}}$를 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5를 이용하여 나타내어라.

(2) 위 문항 (1)의 r_1, r_2, r_3, r_4와 같은 값을 가지는 선분의 비를 <그림 2>에서 각각 찾고 그 이유를 설명하여라.

(3) 직사각형을 주어진 넓이의 비 $A_1 : A_2 : \cdots : A_n$을 가지는 작은 직사각형들로 분할하여 보자. 단, <그림 2>처럼 밑줄 친 제시문의 성질을 만족하여야 한다. 위 문항 (1)에서 구한 식을 일반화하여 $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$을 $A_1, A_2, \dots, A_n$을 이용하여 정의하고, 이 값들을 이용하여 직사각형을 분할하는 과정을 설명하여라.

(4) 위 문항 (3)에서 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 1$ 이라 하자. $A_1, A_2, \dots, A_n$을 $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$로 나타내어라.

기출문제 2 2016 홍익대 문제2

홍익대학교 와우 공학관에는 1층부터 5층까지 운행하는 승강기[엘리베이터] 두 대가 나란히 설치되어 있다. A 승강기(고속)는 각 층마다 정차할 수 있고, B 승강기(저속)는 짝수 층에는 정차하지 않고 홀수 층에만 정차할 수 있다. A와 B 승강기는 중간층에 대기하는 이용자가 없을 경우 그 층에는 정차하지 않는다. 3층에서 승차하려는 이용자는 A와 B 승강기 중 먼저 도착하는 승강기에 탑승하고, 이때 뒤따르는 승강기는 3층에 정차하지 않는다.

A 승강기는 한 층을 이동하는 데 시간이 1초가 걸리고 B 승강기는 두 층을 이동하는 데 3초가 소요된다. A와 B 승강기가 한 층에 도착하여 문이 열린 후 닫히고 다시 출발할 때까지 12초가 소요되며, 이 시간을 이용자가 임의로 연장하거나 단축시킬 수 없고 이 시간 내에 모든 이용자가 승하차한다. 예를 들어, B 승강기가 1층을 출발하여 중간에 한 번 정차하고 5층에 도착하는 순간까지의 소요 시간은 $3+12+3=18$초이다.

두 승강기가 1층을 출발할 때, 2층에서 5층으로 이동하려는 이용자가 2층에서 대기하고 있을 확률은 $\frac{1}{3}$이고 3층에서 5층으로 이동하려는 이용자가 3층에서 대기하고 있을 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 이 두 사건은 서로 독립이며, 그 이외의 사건은 발생하지 않는다.

(1) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, A 승강기가 3층에 먼저 도착할 확률을 구하여라.

(2) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, A 승강기가 5층에 먼저 도착할 확률을 구하여라.

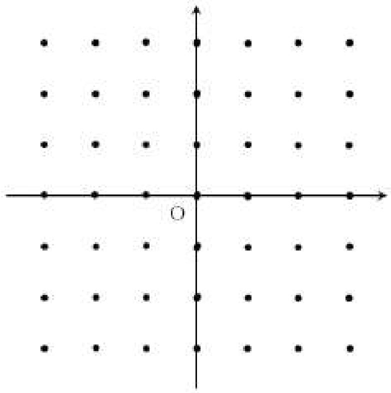
(3) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, 각 승강기가 1층에서 출발하는 순간부터 5층에 도착하는 순간까지의 소요 시간의 기댓값을 각각 구하여라.

(4) 두 명이 각각 다른 승강기를 타고 1층에서 동시에 출발하여 5층에 먼저 도착하는 시합을 할 때, A와 B 승강기 중 어느 승강기를 선택한 사람이 유리한지 설명하여라.

기출문제 3

2016 홍익대 문제3

좌표평면의 점 (a,b)에 대해 a와 b가 둘 다 정수인 점들을 생각하자.



양의 실수 x에 대해, 이러한 점들 중 원점 O에서의 거리가 x 이하인 점들의 개수를 $F(x)$라 하자. 예를 들어, $F(1)=5$, $F(\sqrt{3})=9$, $F(3)=29$ 이다.

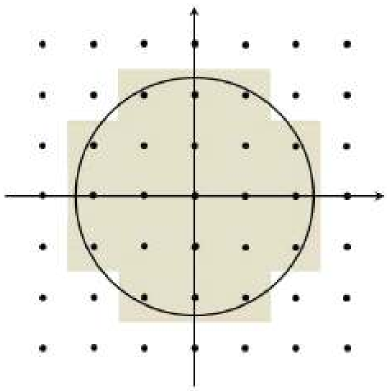
(1) 임의의 양의 실수 x에 대해, $F(x)$를 4로 나눈 나머지는 항상 1임을 설명하여라.

(2) $F(\sqrt{115})=357$ 이다. $F(\sqrt{116})$의 값을 구하여라.

(3) 아래 그림을 참고하여 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이상의 임의의 실수 x에 대해

$$\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

이 성립함을 설명하여라.



(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x^2}$의 값을 구하여라.

기출문제해설 1

2016 홍익대 문제1

【문항 (1) - 예시답안】

작은 직사각형들은 모두 높이가 같으므로 면적의 비는 아랫변의 길이의 비와 같다.

따라서 $r_1 = \dfrac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \dfrac{A_2 + \cdots + A_5}{A_1 + A_2 + \cdots + A_5}$ 이다.

마찬가지로 $k = 1,2,3,4$ 각 경우에 $r_k = \dfrac{\overline{OP_{k+1}}}{\overline{OP_k}} = \dfrac{A_{k+1} + \cdots + A_5}{A_k + A_{k+1} + \cdots + A_5}$ 이다.

【문항 (2) - 예시답안】

(그림 2)에서 A_1으로 표시된 직사각형을 제외한 부분의 면적의 전체 면적에 대한 비는

$r_1 = \dfrac{A_2 + \cdots + A_5}{A_1 + A_2 + \cdots + A_5} = \dfrac{\overline{OQ_2} \cdot \overline{OR_1}}{\overline{OQ_1} \cdot \overline{OR_1}} = \dfrac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}}$ 이다.

이제 남은 직사각형에서 A_2으로 표시된 직사각형을 제외한 부분의 비는

$r_2 = \dfrac{A_3 + \cdots + A_5}{A_2 + A_3 + \cdots + A_5} = \dfrac{\overline{OR_2} \cdot \overline{OQ_2}}{\overline{OR_1} \cdot \overline{OQ_2}} = \dfrac{\overline{OR_2}}{\overline{OR_1}}$ 이다.

마찬가지로 계속하면 $r_3 = \dfrac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}$, $r_4 = \dfrac{\overline{OR_3}}{\overline{OR_2}}$ 이다.

【문항 (3) - 예시답안】

각 $k=1,2,\ \dots\ ,n-1$에 대해 $r_k = \dfrac{A_{k+1}+\ \cdots\ +A_n}{A_k+A_{k+1}+\ \cdots\ +A_n}$ 라 하자.

직사각형의 오른쪽 아래 꼭지점, 왼쪽 위 꼭지점, 왼쪽 아래 꼭지점을 각각 Q_1, R_1, O 라 하고
직사각형의 아랫변과 왼쪽변에 점 $Q_2, Q_3, \dots$와 $R_2, R_3, \dots$를 다음의 비에 따라 표시한다.

$$r_1 = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}},\ r_2 = \frac{\overline{OR_2}}{\overline{OR_1}},\ r_3 = \frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}},\ r_4 = \frac{\overline{OR_3}}{\overline{OR_2}},\ r_5 = \frac{\overline{OQ_4}}{\overline{OQ_3}},\ r_4 = \frac{\overline{OR_4}}{\overline{OR_3}},\ \dots$$

먼저 직사각형을 Q_2에서 세로로 나누고 꼭지점 O를 포함하지 않는 부분을 A_1이라 표시한다. 남은 직사각형을 R_2에서 가로로 나누고 꼭지점 O를 포함하지 않는 부분을 A_2이라 표시한다. 이를 반복한다. 마지막에 O를 포함하는 부분을 A_n이라 표시한다.

(별해) 각 $k=1,2,\ \dots\ ,n-1$에 대해 $r_k = \dfrac{A_{k+1}+\ \cdots\ +A_n}{A_k+A_{k+1}+\ \cdots\ +A_n}$ 라 하자.

직사각형을 먼저 세로로 r_1의 비에 따라 A_1과 O를 포함하는 나머지 부분으로 나눈다. 나머지 부분을 가로로 r_2의 비에 따라 A_2와 O를 포함하는 나머지 부분으로 나눈다. 나머지 부분을 세로로 r_3의 비에 따라 A_3와 O를 포함하는 나머지 부분으로 나눈다. 이 과정을 r_{n-1}까지 반복한 후 O를 포함하는 나머지 부분이 A_n이다.

【문항 (4) - 예시답안】

$r_1 = A_2+\ \cdots\ +A_n,\ r_1r_2 = A_3+\ \cdots\ +A_n$ 이고 일반적으로 $k=1,2,\dots,n-1$ 에 대해
$r_1r_2\cdots r_k = A_{k+1}+\ \cdots\ +A_n$ 이다. 따라서
$A_1 = (A_1+\ \cdots\ +A_n)-(A_2+\ \cdots\ +A_n) = 1-r_1,$
$A_2 = (A_2+\ \cdots\ +A_n)-(A_3+\ \cdots\ +A_n) = r_1-r_1r_2 = r_1(1-r_2)$이고 일반적으로
$A_k = (A_k+\ \cdots\ +A_n)-(A_{k+1}+\ \cdots\ +A_n) = r_1r_2\cdots r_{k-1}-r_1r_2\cdots r_k = r_1r_2\cdots r_{k-1}(1-r_k)$이다.

기출문제해설 2

2016 홍익대 문제2

【문항 (1) - 예시답안】

B 승강기는 2층에 정차하지 않으므로 1층에서 3층까지 소요시간은 항상 3초이다.
A 승강기는 2층에 정차하지 않으면 1층부터 3층까지 소요시간이 2초, 2층에 정차하면 1초+12초+1초=14초이다. 따라서 A 승강기가 B 승강기보다 3층에 먼저 도착하는 확률은 2층에 대기자가 없을 경우의 확률이며 이는 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

【문항 (2) - 예시답안】

가능한 아래의 4가지 경우에 대해 각각 확률과 승강기 운행 총소요시간을 계산하면

① 2층, 3층에 모두 대기자가 없는 경우 (확률: $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$)

A 승강기: 1초+1초+1초+1초=4초
B 승강기: 3초+3초=6초
A 승강기 먼저 5층 도착

② 2층에만 대기자가 있는 경우 (확률: $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$)

2층에 정차할 수 있는 승강기는 A뿐이므로 2층에서 대기하는 이용자는 모두 승강기 A를 이용한다.
A 승강기: 1초+12초+1초+1초+1초=16초
B 승강기: 3초+3초=6초
B 승강기 먼저 5층 도착

③ 3층에만 대기자가 있는 경우 (확률: $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$)

1층에서 동시에 출발하고 2층에 대기자가 없으면 A 승강기는 1초+1초=2초 후에 3층에 도착하며 B 승강기는 3층에 3초 후에 도착한다. 따라서 3층에 대기하고 있는 이용자는 모두 A 승강기를 이용하고, 이후 대기 승객이 없으므로 B 승강기는 3층에 멈추지 않고 5층까지 이동한다.
A 승강기: 1초+1초+12초+1초+1초=16초
B 승강기: 3초+3초=6초
B 승강기 먼저 5층 도착

④ 2층, 3층에 모두 대기자가 있는 경우 (확률: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$)

2층에 정차할 수 있는 승강기는 A 승강기뿐이므로 A 승강기가 2층에 정차하여 2층 대기자가 승차하고, 3층에는 B 승강기가 먼저 도착하여 3층 대기자는 모두 B 승강기에 승차한다. 따라서 A 승강기는 2층에 한번, B 승강기는 3층에 한번 정차한다.
A 승강기: 1초+12초+1초+1초+1초=16초
B 승강기: 3초+12초+3초=18초
A 승강기 먼저 5층 도착

따라서 A 승강기가 5층에 먼저 도착하는 경우는 ①과 ④이며 그 확률은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$이다.

【문항 (3) - 예시답안】

A 승강기 소요시간 기댓값: $4\times\frac{1}{2}+16\times\frac{1}{4}+16\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{12}=10$초

B 승강기 소요시간 기댓값: $6\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{6}+18\times\frac{1}{12}=7$초

【문항 (4) - 예시답안】

문항 (2) 풀이에 의하면 A 승강기가 5층에 먼저 도착하는 경우의 확률이 $\frac{7}{12}$, B 승강기가 5층에 먼저 도착하는 경우의 확률이 $\frac{5}{12}$이므로 A 승강기를 선택하는 것이 유리하다.

기출문제해설 3 2016 홍익대 문제3

【문항 (1) - 예시답안】

$F(x)$는 좌표평면에서 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍의 개수와 같다. 원점을 제외한 임의의 한 점이 이러한 원 안에 포함되면, 90°씩 회전하여 나타나는 4개의 점들이 동시에 포함된다. 그러므로 원점을 제외하면 원 안에 포함된 점의 개수는 4의 배수이다. 원점은 항상 포함되므로 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

(별해1) 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 원점 $(0,0)$은 항상 포함된다. 원점이 아닌 x축 또는 y축 위의 점들은 원점에서의 거리가 같은 4개가 동시에 포함된다. 그 이외의 점 (m,n)이 포함되면 부호를 바꾼 순서쌍 4개 $(m,n), (m,-n), (-m,n), (-m,-n)$가 역시 모두 포함된다. 그러므로 이러한 정수 순서쌍들의 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

(별해2) 정수 순서쌍 (m,n)이 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함되면 집합 $S=\{(m,n), (m,-n), (-m,n), (-m,-n), (n,m), (n,-m), (-n,m), (-n,-m)\}$ 안의 모든 순서쌍들 역시 포함된다. 집합 S의 원소의 개수는 $(m,n)=(0,0)$일 때 1개, 그 외 (m,n)이 x축, y축, 직선 $y=x$또는 $y=-x$위에 있는 경우 4개, 그 외의 경우 8개이다. 원점을 제외하면 원 안에 포함된 점의 개수는 4의 배수이므로, 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

【문항 (2) - 예시답안】

$F(\sqrt{115})$은 $m^2+n^2 \le 115$인 모든 정수 순서쌍 (m,n)의 개수이며, $F(\sqrt{116})$은 $m^2+n^2 \le 116$인 모든 정수 순서쌍 (m,n)의 개수이다. 이때 m^2+n^2의 값은 항상 정수이므로, $115 < m^2+n^2 < 116$인 순서쌍 (m,n)은 존재하지 않는다. 따라서 $F(\sqrt{116})$에 새로 추가되는 점들은 $m^2+n^2=116$인 정수 순서쌍의 개수이다. 이를 구하기 위해 116이 언제 두 제곱수의 합으로 나타나는지 살펴보자. $116 < 11^2$이므로 10^2이하의 제곱수의 집합 $\{0^2, 1^2, 2^2, \cdots, 10^2\} = \{0, 1, 4, \cdots, 100\}$을 고려하면 충분하다. 이들 중 두 제곱수의 합이 116이 되는 경우는 $116=16+100=100+16$밖에 없다. 그러므로 $m^2+n^2=116$인 정수 순서쌍은 제1사분면에 $(4,10), (10,4)$ 두 개가 있고, 나머지 사분면에도 두 개씩 있으므로 총 8개 (즉, $(4,10), (-4,10), (4,-10), (-4,-10), (10,4), (-10,4), (10,-4), (-10,-4)$)이다. 그러므로 $F(\sqrt{116}) = F(\sqrt{115})+8=365$이다.

【문항 (3) - 예시답안】

주어진 그림과 같이 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍 (m,n)에 그 점을 중심으로 갖는 단위면적의 정사각형과의 일대일 대응을 고려하면, 색칠된 영역은 이 정사각형들의 합집합이므로 $F(x)$와 넓이가 같다. 색칠된 영역에 있는 임의의 점 (a,b)는 원점으로부터의 거리가 x이하인 어떤 정수 순서쌍 (m,n)을 중심으로 갖는 단위 정사각형에 포함되므로 (m,n)과 (a,b)사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이하이다. 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합 이하이므로 (a,b)와 원점 사이의 거리는 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$이하이다. 즉, 색칠된 영역은 반지름 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원 안에 포함되므로, 두 넓이를 비교하면 $F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$를 얻는다. 비슷하게, 색칠된 영역에 포함되지 않은 임의의 점 (c,d)는 원점으로부터의 거리가 x보다 큰 어떤 정수 순서쌍 (m,n)을 중심으로 갖는 단위 정사각형에 포함되고, 역시 (m,n)과 (c,d)사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이하이다. 그러므로 (c,d)와 원점 사이의 거리는 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 크다. 즉, 반지름 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원은 색칠된 영역에 포함되므로 $\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x)$ 이다.

【문항 (4) - 출제의도 및 해설】

문항 (3)에서 구한 부등식을 이용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있는지 평가한다. 고등학교 <수학 II> 함수의 극한과 연속 단원에서 극한의 성질에 대해 학습한다. 특히 상술한 함수의 극한의 대소 관계와 문항 (3)의 결과로부터 문항 (4)의 함수의 극한값을 구할 수 있다.

【문항 (4) - 예시답안】

$x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 위 문항에서 구한 부등식 $\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 으로부터 부등식 $\pi\frac{(x-\sqrt{2}/2)^2}{x^2} \le \frac{F(x)}{x^2} \le \pi\frac{(x+\sqrt{2}/2)^2}{x^2}$을 얻는다. $x\to\infty$일 때 부등식의 좌, 우 항이 모두 π로 수렴하므로 $\frac{F(x)}{x^2}$도 π로 수렴한다.