[2016 기출문제]

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

양의 실수 t에 대하여 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x)=(t+1)e^{-x} \quad (0 \le x \le a)$$

(a) a를 t에 관한 식으로 나타내어라.(30점)

(b) $E(X^2)$과 극한값 $\lim_{t\to\infty} E(X^2)$ 을 구하여라.(70점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

자연수 n에 대하여 $a_n = 10^n - 1$일 때, 연립부등식

$$\begin{cases} 1 \le x \le a_n \\ 0 \le y \le \log x \end{cases}$$

를 만족시키는 두 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 S_n이라 하자. (단, $\log x$는 x의 상용로그이다.)

(a) S_n을 n에 관한 식으로 나타내어라.(60점)

(b) 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\log a_n \times 10^n}$을 구하여라.(40점)

[문제3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (※ 변환 부분을 개정교과에 맞춰 변환)

변환 f는 점 (x,y)를 점 $(x\sin\theta+y, x\sin^2\theta+y\sin\theta)$ 옮기는 변환이다. 점 $(1,\ 1)$이 변환 f에 의해 영역

$$\{(x,y) \mid (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1\}$$

의 점으로 옮겨질 때 다음 물음에 답하여라.

(a) $\sin\theta < 0.9$임을 보여라.(50점)

(b) $17-4\cos 2\theta\sin\theta-20\sin\theta-9\cos 2\theta$의 최댓값을 구하여라.(50점)

[문제4]

삼각형 ABC에서 $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{AC}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$ 이고 $a\le b\le c$이다. 삼각형 ABC의 내부 또는 경계에 있는 점 P에 대하여 내적

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

의 최댓값과 최솟값을 $a,\ b,\ c$ 에 관한 식으로 나타내시오.

2016학년도 서울시립대학교 논술고사 해설 (자연계열)

문제1.

(a) $\int_0^a \frac{(t+1)}{e^x}dx=(t+1)\left[-e^{-x}\right]_0^a=(t+1)(1-e^{-a})=1$ 이고 정리하면

$e^{-a}=\frac{t}{t+1}$ 에서 $a=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$ (단, $t>0$)이다.

(b) (a)에서 $t=-1+\frac{1}{1-e^{-a}}=\frac{1}{e^a-1}$ 이고

$$\begin{aligned}E(X^2)&=(t+1)\int_0^a x^2e^{-x}dx=-(t+1)\left[e^{-x}(x^2+2x+2)\right]_0^a\\&=-(t+1)\left[e^{-a}(a^2+2a+2)-2\right]\\&=-(t+1)e^{-a}(a^2+2a+2)+2(t+1)\\&=-t(a^2+2a+2)+2(t+1)\\&=-t(a^2+2a)+2\\&=-\frac{a}{e^a-1}(a+2)+2\end{aligned}$$

이다. $t\to\infty$ 이면 $a\to 0+$ 이므로 $\lim_{t\to\infty}E(X^2)=\lim_{a\to 0+}\left\{-\frac{a}{e^a-1}(a+2)+2\right\}=0$ 이다.

문제2.

(a) $S_n=1\times 9+2\times 90+3\times 900+\cdots+n\times(10^n-10^{n-1})=9\sum_{k=1}^{n}k\times 10^{k-1}$

$10S_n=9\sum_{k=0}^{n}k10^k=9\sum_{k=0}^{n}(k+1)10^k-9\sum_{k=0}^{n}10^k=9\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)10^k+9(n+1)10^n-9\sum_{k=0}^{n}10^k$

$=S_n+9(n+1)10^n-(10^{n+1}-1)=S_n+(9n-1)10^n+1$

이므로 $S_n=\left(n-\frac{1}{9}\right)10^n+\frac{1}{9}$ 이다.

[다른풀이]

$$S_n=1\times 9+2\times 9\times 10+3\times 9\times 10^2+\cdots+n\times 9\times 10^{n-1}$$

$$S_n=9(1+2\times 10+3\times 10^2+\cdots+n\times 10^{n-1})\ \cdots ㉠$$

S_n 의 양변에 10을 곱하면

$$10S_n=9(10+2\times 10^2+3\times 10^3+\cdots+n\times 10^n)\ \cdots ㉡$$

㉠−㉡ 을 하면

$$-S_n=1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}-n\cdot 10^n=\frac{10^n-1}{10-1}-n\cdot 10^n$$

이고, 이를 정리하면

$$S_n = 10^n\left(n - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9}$$

이다.

(b) $s_n < n \cdot 10^n$ 이고 $\log a_n > \log 10^{n-1} = n-1$이므로

$$\frac{s_n}{\log a_n \times 10^n} < \frac{n10^n}{(n-1)\times 10^n} \quad \cdots \text{①}$$

이다. 또한 $s_n > (n-1)10^n$ 이고 $\log a_n < \log 10^n = n$ 이므로

$$\frac{s_n}{\log a_n \times 10^n} > \frac{(n-1)10^n}{n \times 10^n} \quad \cdots \text{②}$$

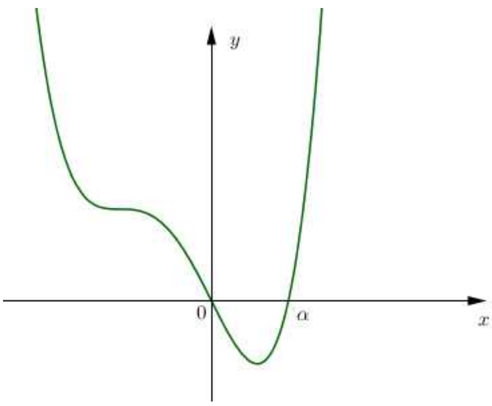
이다. ①, ②에 의해 $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\log a_n \times 10^n} = 1$ 이다.

문제3.

(a) $\begin{pmatrix} \sin\theta & 1 \\ \sin^2\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta + 1 \\ \sin^2\theta + \sin\theta \end{pmatrix}$ 이므로 $\sin^2\theta + (\sin^2\theta + \sin\theta - 1)^2 \le 1$ 을 정리하면

$\sin^4\theta + 2\sin^3\theta - 2\sin\theta \le 0$ 이다. $\sin\theta = x\,(-1 \le x \le 1)$ 라 두자.

함수 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x$ 에 대하여 $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2 = 2(x+1)^2(2x-1)$ 이므로 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x \le 0$를 만족하는 범위는 $0 \le x \le \alpha$ 이다.

또한 $f(0.9) = \left(\frac{9}{10}\right)^4 + 2\left(\frac{9}{10}\right)^3 - 2\left(\frac{9}{10}\right) > 0$ 이므로 $0 \le \sin\theta < 0.9$ 이다.

따라서 $\sin\theta < 0.9$이다.

(b)

$17 - 4\cos 2\theta \times \sin\theta - 20\sin\theta - 9\cos 2\theta = 17 - 4(1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta - 20\sin\theta - 9(1 - 2\sin^2\theta)$

$$= 8\sin^3\theta + 18\sin^2\theta - 24\sin\theta + 8$$

이다. $\sin\theta = x\,(0 \le x \le \alpha)$라 두고 함수 $f(x) = 8x^3 + 18x^2 - 24x + 8$ 에 대하여

$f'(x) = 12(2x^2 + 3x - 2) = 12(x+2)(2x-1)$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극솟값을 갖는다. 따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\max\{f(0),\, f(\alpha)\} = \max\{8,\, f(\alpha)\}$ 이다.

$\frac{1}{2} < \alpha < 0.9$ 에서 $f(\alpha) < 8$ 임을 보이자.

$$f(\alpha) - 8 = 8\alpha^3 + 18\alpha^2 - 24\alpha = 2\alpha(4\alpha^2 + 9\alpha - 12)$$

이므로 $4\alpha^2 + 9\alpha - 12 < 0$ 임을 보이면 충분하다. 함수 $h(x) = 4x^2 + 9x - 12$ 라 하면 $\frac{1}{2} < x < 0.9$ 에서 $h(x) < h(0.9) = \frac{324}{100} + \frac{81}{10} - \frac{120}{10} = \frac{324 + 810 - 1200}{100} < 0$ 이므로

$\frac{1}{2} < \alpha < 0.9$ 에서 $f(\alpha) < 8$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\sin\theta = 0$ 일 때 8 이다.